512.0076
Gi 103T

ThS. NGUYỄN DUY HIẾU
(Giáo viên chuyên Toán trường chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh)

GIẢI TOÁN
ĐẠI SỐ
10

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 133181 / 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Biên tập nội dung:
LƯU THẾ SƠN

Kĩ thuật vi tính:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Trình bày bìa:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đơn vị liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ 10

Mã số: 02.02.74/77.PT2013
ISBN: 978-604-540-161-3

In 2.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Đăng kí KHXB số: 977 - 2013/CXB/74-57/ĐHSP, ngày 30/07/2013.
QĐXB số: 915/QĐ– ĐHSP ngày 15/08/2013.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2013.

Lời nói đầu

Nhằm giúp các em học sinh có thêm tài liệu học và rèn kĩ năng giải toán. Chúng tôi biên soạn cuốn: **"GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ 10"**.

Cuốn sách gồm sáu chương:

Chương 1: Mệnh đề - Tập hợp.

Chương 2: Hàm số bậc nhất và bậc hai.

Chương 3: Phương trình và hệ phương trình.

Chương 4: Bất đẳng thức và bất phương trình.

Chương 5: Thống kê.

Chương 6: Góc và cung lượng giác giá trị lượng giác của một góc.

Nội dung của mỗi chương được trình bày theo bố cục bài học sách giáo khoa.

Mỗi bài gồm các phần:

A. Tóm tắt sách giáo khoa.

B. Phương pháp giải các dạng toán: Phần này được trình bày theo từng vấn đề. Mỗi vấn đề là một dạng toán thường gặp liên quan đến kiến thức của bài học tương ứng.

Mỗi dạng toán đều có nêu các phương pháp giải, các ví dụ minh họa và các bài tập luyện tập. Các bài tập luyện tập đều có hướng dẫn giải hay đáp số nhằm giúp các em học sinh tự kiểm tra lại kết quả của mình.

Cuối mỗi chương có các bài tập tổng hợp để giúp các em ôn tập các kiến thức đã học.

Chúng tôi hy vọng cuốn sách sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh dễ dàng tiếp cận, nắm vững và trau dồi kiến thức môn Toán 10 để đạt được kết quả tốt nhất trong các kì thi.

Dù đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song chắc khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi xin đón nhận những ý kiến phản hồi và chân thành cảm ơn mọi sự góp ý của quý độc giả, để lần tái bản sau sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

CHƯƠNG 1. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. *Mệnh đề logic* (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định *đúng hoặc sai*. Một câu khẳng định *đúng* gọi là một mệnh đề *đúng*, một câu khẳng định *sai* gọi là một mệnh đề *sai*. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

2. Cho mệnh đề P. Mệnh đề "*không phải P*" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$. Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

3. Cho hai mệnh đề P và Q.

a. Mệnh đề "*Nếu P thì Q*" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

b. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

c. Mệnh đề có dạng "*P nếu và chỉ nếu Q*" được gọi là *mệnh đề tương đương* và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.

3. *Mệnh đề chứa biến* P(x) là một câu chứa biến (không phải là mệnh đề đúng hay sai), nhưng với mỗi giá trị của biến x trong tập xác định X nào đó ta được một mệnh đề.

a. Cho mệnh đề chứa biến P(x) với $z \in X$. Khi đó khẳng định "*với mọi x thuộc X, P(x) đúng*" là một mệnh đề. Mệnh đề này *sai* nếu tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là một mệnh đề sai. Mệnh đề trên được kí hiệu là "$\forall x \in X, P(x)$".

b. Cho mệnh đề chứa biến P(x) với $x \in X$. Khi đó khẳng định "*tồn tại x thuộc X, P(x) đúng*" là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là một mệnh đề đúng. Mệnh đề trên được kí hiệu là "$\exists x \in X, P(x)$".

c. Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X, P(x)$" là "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

***Vấn đề 1:* Xác định một phát biểu có là mệnh đề. Tính đúng, sai của mệnh đề.**

1. Phương pháp:

- Một phát biểu mà chắc chắn là đúng hay chắc chắn là sai thì phát biểu đó là mệnh đề.
- Khi một mệnh đề có dạng phủ định, kéo theo, tương đương, ... thì ta căn cứ vào định nghĩa và tính đúng, sai của chúng để xét. Cần nhớ:

* $P, \overline{P}$ không cùng tính đúng, sai.

* $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai.

* $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.

* $\forall x \in X, P(x)$ đúng khi $P(x_0)$ đúng với mọi $x_0 \in X$.

* $\exists x \in X, P(x)$ đúng khi có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

a) A: $\sqrt{2}$ là một số nguyên dương.

b) B: Ca–na–đa là một nước thuộc châu Âu phải không?

c) C: Phương trình $x^5 + 5x - 6 = 0$ vô nghiệm.

d) D: Chứng minh bằng phản chứng khó thật!

e) E: $-5x - 6$ là một số âm.

f) F: Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.

g) G: Nếu n chia hết cho 4 thì n là số chẵn.

h) H: n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 4.

i) I: $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3.

k) K: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$

Giải

a) A là mệnh đề sai.

b) B là một câu hỏi, không phải là mệnh đề.

c) C là mệnh đề sai vì phương trình trên có ít nhất một nghiệm là $x = 1$.

d) D là câu cảm thán, không phải là mệnh đề.

e) E không phải là mệnh đề. Đây là mệnh đề chứa biến.

f) F là mệnh đề sai vì n là số chẵn nhưng n chưa chắc chia hết cho 4.

g) G là mệnh đề đúng.

h) H là mệnh đề đúng.

i) I là mệnh đề sai vì $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = (n-1)n(n+1) \vdots 3$

k) K là mệnh đề đúng vì $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Ví dụ 2: Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu $3 < 5$ thì $3 < 7$.

b) Nếu 45 tận cùng bằng 5 thì 45 chia hết cho 25.

c) Nếu $\sqrt{2}$ không là số vô tỉ thì $2\sqrt{2}$ không là số vô tỉ.

d) Nếu Py–ta–go (Pythagore) là người Thái Lan thì Việt Nam thuộc về châu Á.

e) $2 = 3 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3 + 1$.

f) $(-5)^2 = 5^2 \Leftrightarrow -5 = 5$.

g) Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD có các góc đối bằng nhau.

Giải

a) Đặt P = "3 < 5" và Q = "3 < 7". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "$P \Rightarrow Q$". Ta thấy P đúng và Q đúng, do đó mệnh đề đã cho đúng.

b) Đặt P = " 45 tận cùng bằng 5" và Q = "45 chia hết cho 25". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Rightarrow$ Q". Ta thấy P đúng và Q sai, do đó mệnh đề đã cho sai.

c) Đặt P = "$\sqrt{2}$ không là số vô tỉ" và Q = "$2\sqrt{2}$ không là số vô tỉ". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Rightarrow$ Q". Ta thấy P sai và Q sai, do đó mệnh đề đã cho đúng.

d) Đặt P = "Pythagore là người Thái Lan" và Q = "Việt Nam thuộc về châu Á". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Rightarrow$ Q". Ta thấy P sai và Q đúng, do đó mệnh đề đã cho đúng.

e) Đặt P = "2 = 3" và Q = "2 + 1 = 3 + 1". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Leftrightarrow$ Q". Ta thấy P sai và Q sai, do đó mệnh đề đã cho đúng.

f) Đặt P = "$(-5)^2 = 5^2$" và Q = "–5 = 5". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Leftrightarrow$ Q". Ta thấy P đúng và Q sai, do đó mệnh đề đã cho sai.

g) Đặt P = "Tứ giác ABCD là hình bình hành" và Q = "Tứ giác ABCD có các góc đối bằng nhau". Ta có mệnh đề đã cho có dạng "P $\Leftrightarrow$ Q". Ta thấy P và Q cùng đúng hoặc cùng sai, do đó mệnh đề đã cho đúng.

3. Bài tập

Bài 1. Tìm mệnh đề trong các câu sau và cho biết chúng đúng hay sai?

a) 5 là số chẵn.

b) Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông.

c) 2 có phải là số nguyên tố không?

d) Hôm nay trời không mưa, chúng ta đi xem ca nhạc nhé!

e) Nếu phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$ thì nó có nghiệm.

f) Trái Đất quay quanh Mặt Trời.

g) Tháng hai (dương lịch) có 30 ngày.

h) $\pi^2 > 10$.

i) Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0.

k) Hình lập phương có 8 đỉnh.

l) Bao giờ lớp mình đi dã ngoại?

m) Thủy ngân không phải là kim loại.

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) Tất cả các chất khí đều không dẫn điện.

b) Nhà toán học Cô-si (Cauchy) là người Ý.

c) 9801 là số chính phương.

d) Giải thưởng cao nhất về toán học trên thế giới là giải Nobel.

e) Có vô số số nguyên tố.

f) Một năm có tối đa 52 ngày chủ nhật.

Bài 3. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Xét hai mệnh đề sau:

P: "Tam giác ABC vuông tại A"

Q: "Trung tuyến AM bằng nửa cạnh BC"

a) Phát biểu mệnh đề P $\Rightarrow$ Q và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

b) Phát biểu mệnh đề P $\Leftrightarrow$ Q và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

Bài 4. Xét hai mệnh đề sau: P: "120 chia hết cho 6 và chia hết cho 8"

Q: "120 chia hết cho 6.8"

a) Phát biểu mệnh đề P $\Rightarrow$ Q và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

b) Phát biểu mệnh đề P $\Leftrightarrow$ Q và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

Vấn đề 2: Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

1. Phương pháp

Mệnh đề phủ định của P là "không phải P".

Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X, P(x)$" là $\exists x \in X, \overline{P(x)}$.

Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X, P(x)$" là $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo này đúng hay sai: "Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau"

Giải

Mệnh đề đã cho có dạng: $P \Rightarrow Q$ trong đó

P = "hai góc đối đỉnh" và Q = "hai góc bằng nhau".

Vậy mệnh đề đảo là: "Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh". Mệnh đề này sai.

Ví dụ 2: Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai:

a) P = "$\forall x \in \mathbb{R}, (x-3)^2 \geq 0$"

b) Q = "Có một tam giác không có góc nào lớn hơn 60^0"

Giải

a) Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$ = "$\exists x \in \mathbb{R}, (x-3)^2 < 0$". Đây là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$ = "Mọi tam giác luôn có một góc lớn hơn 60^0". Đây là mệnh đề sai vì tam giác đều không có góc lớn hơn 60^0.

3. Bài tập

Bài 1. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết mệnh đề phủ định đúng hay sai?

A = "Mọi số thực đều là số nguyên"

B = "Tồn tại một số góc α sao cho $\sin\alpha > 1$"

C = "Mọi tam giác đều luôn là tam giác cân".

Bài 2. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai?

a) P = "$\forall x \neq 0,\ x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$"

b) Q = "Có một hình thoi không phải là hình vuông".

Bài 3. Cho mệnh đề chứa biến P(x): "$x = x^4$". Xác định tính đúng – sai của các mệnh đề sau:

a) P(0) b) P(1) c) P(2)

d) P(–1) e) $\exists x \in \mathbb{Z}, P(x)$ f) $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x)$.

Bài 4. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) A = "$\forall x \in \mathbb{R}, x - 2 > x^2$".

b) B = "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3

c) C = "$\exists r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$

d) D = "Có những tứ giác không có đường tròn ngoại tiếp".

Bài 5. Gọi X là tập hợp tất cả các học sinh ở lớp 10A. Xét mệnh đề chứa biến P(x): "x tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong một ngày". Hãy phát biểu các mệnh đề sau bằng các câu thông thường:

a) $\exists x \in X, P(x)$ b) $\forall x \in X, P(x)$

c) $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ d) $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

Bài 6. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề đó:

a) $\exists r \in \mathbb{Q}, 3 < r < \pi$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 > 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geqslant n + 2$ d) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 8.

§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định lí và chứng minh định lí:

Trong toán học, định lí là những mệnh đề đúng.

Thông thường định lí được phát biểu dưới dạng:

"$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1)

trong đó P(x) và Q(x) là những mệnh đề chứa biến, X là một tập hợp nào đó.

Chứng minh định lí (1) là dùng suy luận và những kiến thức đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (1) là đúng.

Ta có thể chứng minh định lí dạng (1) một cách trực tiếp hay gián tiếp.

a. Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước sau:

- Lấy x tuỳ ý thuộc X mà P(x) đúng;
- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để chỉ ra rằng Q(x) đúng.

Khi đó " $P(x) \Rightarrow Q(x)$ " đúng. Do đó định lí được chứng minh.

b. Phép chứng minh phản chứng (gián tiếp) gồm các bước sau:

- Giả sử tồn tại x thuộc X sao cho P(x) đúng và Q(x) sai, tức là mệnh đề (1) sai;
- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để đi đến mâu thuẫn (với giả thiết hay với một kết quả đúng đã biết).

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ

Cho định lí có dạng "$A \Rightarrow B$". A gọi là giả thiết, B gọi là kết luận của định lí.

Khi có ta nói:

"A là điều kiện đủ để có B" hay "B là điều kiện cần để có A".

3. Định lí đảo, điều kiện cần và đủ

Cho định lí "$A \Rightarrow B$" (*)

Nếu mệnh đề "$B \Rightarrow A$" đúng thì nó được gọi là định lí đảo của định lí (*).

Khi đó (*) gọi là định lí thuận.

Định lí thuận và đảo có thể gộp lại thành một định lí "$A \Leftrightarrow B$".

Lúc này ta nói:

"**A là điều kiện cần và đủ để có B**" hay "**Điều kiện cần và đủ để có A là B**".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Phương pháp chứng minh định lí.

Ta thường sử dụng một trong hai phương pháp sau để chứng minh định lí:

1. Phương pháp chứng minh phản chứng:

Để chứng minh "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" bằng phương pháp phản chứng ta làm như sau:

- Giả sử P(x) đúng mà $Q(x)$ sai.
- Từ điều giả sử trên ta suy ra một điều vô lí.

Vậy phải có Q(x) đúng. Do đó "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" đúng.

2. Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước sau:

- Lấy x tuỳ ý thuộc X mà $P(x)$ đúng;
- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để chỉ ra rằng $Q(x)$ đúng.

Khi đó " $P(x) \Rightarrow Q(x)$ " đúng. Do đó định lí được chứng minh.

Ví dụ 1:

Chứng minh định lí: "Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4"

Giải

Với mọi số tự nhiên lẻ n, ta có $n = 2k + 1$ ($k \in N$).

Suy ra $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$.

Vì $k^2 + k \in N$ nên $n^2 - 1$ chia hết cho 4.

Vậy định lí được chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh bằng phản chứng:

"Với mọi số tự nhiên n, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ"

Giải

Giả sử với số tự nhiên n mà $5n + 4$ là số lẻ nhưng n không là số lẻ.

Khi đó ta có n phải là số chẵn

$\Rightarrow 5n$ là số chẵn

$\Rightarrow 5n + 4$ là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $5n + 4$ là số lẻ.

Vậy ta phải có: Với mọi số tự nhiên n, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ. Do đó định lí được chứng minh.

Ví dụ 3:

Chứng minh: Nếu nhốt n con thỏ vào k cái chuồng ($k < n$) thì có một chuồng chứa nhiều hơn 1 con thỏ (Nguyên lí Dirichlet).

Giải

Giả sử nhốt n con thỏ và k cái chuồng mà không có chuồng nào chứa nhiều hơn 1 con thỏ.

Khi đó số thỏ mỗi chuồng ≤ 1 thỏ. Do đó số thỏ trong k chuồng $\leq k < n$ (vô lí).

Vậy phải có ít nhất một chuồng có nhiều hơn 1 con thỏ.

Vấn đề 2: Phát biểu định lí, định lí đảo dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

Một định lí thường có dạng "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (*).

Khi đó ta có thể phát biểu (*) theo hai cách sau:

- Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần": "*$Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$*"
- Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ": "*$P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$*".

Ví dụ 1: Cho định lí: "$\forall$ n $\in$ N, n chia hết cho 6 $\Rightarrow$ n chia hết cho 3".
Hãy phát biểu định lí trên theo ngôn ngữ "điều kiện cần" và "điều kiện đủ".

Giải

* Theo ngôn ngữ điều kiện đủ:
"n chia hết cho 6 là điều kiện đủ để n chia hết cho 3".
* Theo ngôn ngữ điều kiện cần:
"n chia hết cho 3 là điều kiện cần để n chia hết cho 6".

Ví dụ 2: Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" phát biểu các định lí sau:
a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
b) Nếu a + b > 0 thì có ít nhất một số a hay b dương.

Giải

a) * Theo ngôn ngữ điều kiện cần:
"Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác đó bằng nhau"
* Theo ngôn ngữ điều kiện cần:
"Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác đó có diện tích bằng nhau"
b) * Theo ngôn ngữ điều kiện cần:
"Hai số a, b có ít nhất một số dương là điều kiện cần để a + b > 0"
* Theo ngôn ngữ điều kiện cần:
"Hai số a, b thỏa a + b > 0 là điều kiện đủ để hai số đó có ít nhất một số dương"

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho các mệnh đề chứa biến:
P(n): "n là số chẵn" và Q(n): "7n + 4 là số chẵn"
a) Phát biểu và chứng minh định lí "$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, P(n) $\Rightarrow$ Q(n)"
b) Phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên.
c) Phát biểu định lí thuận và định lí đảo bằng hai cách.

Bài 2. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau:
a) Nếu hai tam giác đồng dạng thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau.
b) Nếu ABCD là hình thoi thì ABCD có hai đường chéo vuông góc.
c) Nếu a = b thì $a^2 = b^2$.

Bài 3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau:
a) Với n $\in$ $\mathbb{Z}$, nếu n^2 chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.
b) Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến từ đỉnh A cũng là đường cao.
c) Nếu một số nguyên dương lẻ được biểu diễn thành tổng của hai số chính phương thì số đó phải có dạng 4k + 1 (k $\in$ $\mathbb{N}$).

Bài 4. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu các định lí sau:
a) Tam giác ABC vuông tại A nếu và chỉ nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
b) Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối của nó bằng 180^0.

Bài 5. Chứng minh các định lí sau bằng phản chứng:
a) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.
b) Một tam giác không phải là tam giác đều thì nó có ít nhất một góc nhỏ hơn 60^0.

c) Cho a, b, c $\in \mathbb{R}$. Có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là đúng:

$a^2 + b^2 \geq 2bc$; $b^2 + c^2 \geq 2ca$; $c^2 + a^2 \geq 2ab$.

Bài 6. Cho định lí:

"Nếu m, n là hai số nguyên dương và mỗi số đều chia hết cho 3 thì tổng $m^2 + n^2$ cũng chia hết cho 3."

Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên (nếu có) rồi dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

Bài 7. Xác định m để

a) $f(x) = (m-2)x^2 + (2-3m)x + m \geq 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

b) $g(x) = (m-2)x - (3m-2)\sqrt{x-1} + 2 \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Bài 8. Xác định m để:

a) Phương trình $x^4 - 4mx^2 + m^2 - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

b) Phương trình $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = m$ có nghiệm duy nhất.

c) Hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + mxy = m^2 - 1 \\ (m+2)x^2 + 4y^2 = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

d) Hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - |y| = m \\ \sqrt{x^2+9} + |x| = \sqrt{9-y^2} + m - 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 9. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$.

Chứng minh rằng nếu $ac \geq 2(b + d)$ thì có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Bài 10. Cho $f(x) = x^2 + ax + b$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của a, b thì trong ba số $|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|$ có ít nhất một số lớn hơn hay bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 11. Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c thỏa mãn ba điều kiện:

$a + b + c > 0$; $ab + bc + ca > 0$ và $abc > 0$

thì cả ba số a, b, c đều dương.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Tập hợp

1. Tập hợp là gì?

➢ Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không được định nghĩa mà chỉ mô tả.

Ta hiểu: tập hợp là một sự tụ tập các đối tượng, vật thể có chung một hay vài tính chất nào đó.

Ví dụ 1:

- Tập hợp các số tự nhiên.
- Tập hợp các tam giác vuông cân.
- Tập hợp các học sinh giỏi của khối 10.

Để cho gọn đôi khi ta gọi tập hợp là "tập".

➢ Các đối tượng tạo nên tập hợp gọi là *phần tử* của tập hợp đó. Nếu x là phần tử của tập hợp X, ta viết $x \in X$ (đọc là: x thuộc X). Nếu y không là phần tử của tập hợp X, ta viết $y \notin X$ (đọc là y không thuộc X).

2. Cách xác định một tập hợp

➢ **Phương pháp liệt kê**:

Các phần tử của tập hợp được viết trong dấu {...}, cách nhau bởi dấu phẩy (hay dấu chấm phẩy), mỗi phần tử chỉ viết một lần.

Ví dụ 2:

- Tập A gồm 5 số nguyên tố đầu tiên là A = {2; 3; 5; 7; 11}
- Tập B gồm các chữ số của số 17454 là B = {1; 4; 5; 7}.

➢ **Phương pháp nêu đặc trưng**:

Nếu tập X chứa và chỉ chứa những phần tử có tính chất P thì ta ghi:

$X = \{x \mid x \text{ có tính chất P}\}$.

Ví dụ 3:

- Tập A các số thực lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 là $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$.
- Tập C các điểm của đường tròn (O, R) là $C = \{M \mid OM = \mathbb{R}\}$.
- Tập S gồm các nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ là

  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$.

3. Tập rỗng

Khi nói đến tập hợp là nói đến các phần tử của nó. Tuy nhiên, người ta cũng xét cả tập hợp không có phần tử nào. Tập như vậy gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ 4: Tập S gồm các nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ là

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\} = \varnothing$.

II. Tập con và tập hợp bằng nhau

1. Tập con: Tập A được gọi là tập con của tập B nếu mọi phần tử thuộc A đều thuộc B, kí hiệu $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

Ví dụ 5:

- Nếu A = {1, 3, 5, 7}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} thì $A \subset B$.
- Nếu C là tập các hình bình hành và D là tập các hình thoi thì $D \subset C$.

Chú ý: * $A \subset A$ với mọi tập A

* $A \subset B$ và $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

* Quy ước: $\varnothing \subset A$ với mọi tập A.

2. Tập hợp bằng nhau

Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu mọi phần tử thuộc A đều thuộc B và ngược lại. Kí hiệu A = B

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A$$

Ví dụ 6: Cho hai tập

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của 4 và 6}\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của 12}\}$.

Ta có A = B

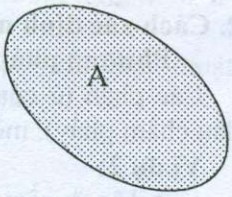
b) M = tập tất cả các tam giác đều;

N = tập tất cả các tam giác cân có một góc bằng 60^0.

Ta có M = N

3. Biểu đồ Ven

Để minh hoạ trực quan một tập hợp ta dùng một đường cong phẳng khép kín không tự cắt, các điểm bên trong chỉ các phần tử của tập hợp.



III. Một số các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$

- Tập số thực $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
- Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
- Nửa khoảng $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
- Nửa khoảng $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
- Nửa khoảng $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$
- Khoảng $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- Khoảng $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Ghi chú:

* ∞ là kí hiệu toán học chỉ một đại lượng có giá trị tuyệt đối lớn và không có hạn định nào.

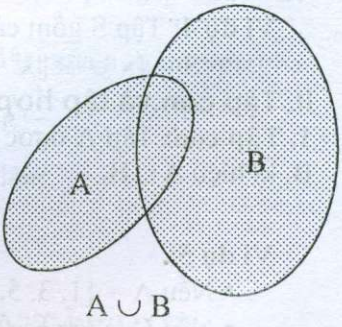
* $+\infty$ đọc là dương vô cực; $-\infty$ đọc là âm vô cực.

IV. Các phép toán trên tập hợp

1. Phép hợp

Hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$



$A \cup B$

Ví dụ 7:

Tìm hợp của hai tập sau:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

b) $D = [-2; 1]$, $E = (1; 3)$.

Giải

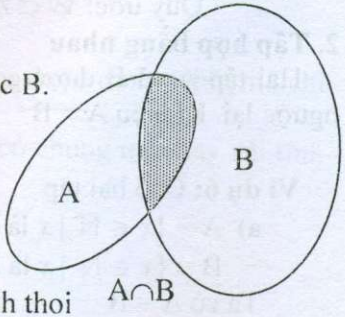
a) Ta có $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$.

b) Ta có: $D \cup E = \{x \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ hay } 1 < x < 3\} = \{x \mid -2 \leq x < 3\} = [-2; 3)$.

2. Phép giao

Giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cap B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$



$A \cap B$

Ví dụ 8:

Tìm giao của hai tập sau:

- $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{3; 5; 7\ 9\}$
- $X = (0; 2]$, $Y = [1; 4]$
- C = tập tất cả các hình chữ nhật, T = tập tất cả các hình thoi

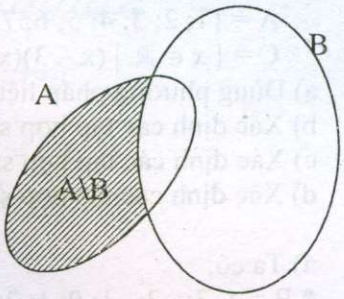
Giải

* $A \cap B = \{3; 5\}$.

* $X \cap Y = \{x \mid x \in (0; 2] \text{ và } x \in [1; 4]\}$
$= \{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ và } 1 \leq x \leq 4\}$
$= \{x \mid 1 \leq x \leq 2\} = [1; 2]$.

3. Phép lấy hiệu

Hiệu của hai tập A và B, kí hiệu A\B, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.



$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Ví dụ 9:

a. Cho $A = \{1; 2; 3\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Tìm A\B, B\A.

b. Cho $X = (1; 3]$, $Y = [2; 4]$. Tìm X\Y, Y\X.

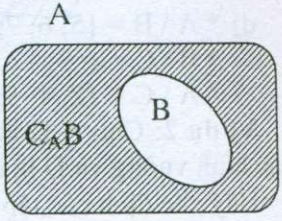
Giải

a. Ta có: $A \setminus B = \varnothing$.
$B \setminus A = \{4; 5\}$.

b. $X \setminus Y = \{x \mid x \in (1; 3] \text{ và } x \notin [2; 4]\}$
$= \{x \mid 1 < x \leq 3] \text{ và } (x < 2 \text{ hay } x > 4)\}$
$= \{x \mid 1 < x < 2\} = (1; 2)$.

$Y \setminus X = \{x \mid x \in [2; 4] \text{ và } x \notin (1; 3]\}$
$= \{x \mid 2 \leq x \leq 4 \text{ và } (x \leq 1 \text{ hay } x > 3)\}$
$= \{x \mid 3 < x \leq 4\} = (3; 4]$.

* Đặc biệt, khi $B \subset A$ thì A\B được gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu là $C_A B$.



Ví dụ 10:

• Phần bù của tập số lẻ trong tập các số nguyên là tập hợp các số nguyên chẵn.

• $B = (-\infty; 2) \Rightarrow C_{\mathbb{R}} B = [2; +\infty)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

***Vấn đề 1:* Xác định tập hợp và các phép toán trên tập hợp**

1. Phương pháp

a) Để xác định một tập hợp ta có thể:

* Liệt kê các phần tử của tập hợp nếu đó là tập hữu hạn.

* Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp đó.

b) Để xác định một tập hợp là kết quả của các phép toán trên các tập hợp cho trước ta áp dụng các định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

Chú ý: Với các tập hợp và các phép toán trên tập hợp các số thực ta thường:

* Biểu diễn các tập hợp lên trục số thực.

* Dùng định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1:

Cho ba tập hợp:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 4\}$ và

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x^2 - 10x + 9) = 0\}$

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C.

b) Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$

c) Xác định các tập hợp sau: $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$

d) Xác định các tập hợp sau: $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus C$

Giải

a) Ta có:

* $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

* Ta có $(x-3)(x^2 - 10x + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right.$.

Do đó: $C = \{1; 3; 9\}$.

b) * $A \cap B = \{1; 2; 3; 4\}$.

* $B \cap C = \{1; 3\}$.

* $A \cap C = \{1; 3\}$.

c) * $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

* $B \cup C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 9\}$.

* $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

d) * $A \setminus B = \{5; 6; 7; 8\}$.

* $B \setminus C = \{-3; -2; -1; 0; 2; 4\}$.

* $A \setminus C = \{2; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Ví dụ 2: Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật; C là tập các hình vuông và D là tập các hình bình hành.

Hãy xác định các tập hợp: $A \cap B$; $B \cap C$; $B \cap D$; $B \cup C$ và $A \cup D$.

Giải

* $A \cap B = \{x \mid x$ là hình thoi và x là hình chữ nhật$\}$
$= \{x \mid x$ là hình vuông$\} = C$.

* $B \cap C = \{x \mid x$ là hình chữ nhật và x là hình vuông$\}$
$= \{x \mid x$ là hình vuông$\} = C$.

* $B \cap D = \{x \mid x$ là hình chữ nhật và x là hình bình hành$\}$
$= \{x \mid x$ là hình chữ nhật$\} = B$.

* $B \cup C = \{x \mid x$ là hình chữ nhật hoặc x là hình vuông$\}$
$= \{x \mid x$ là hình chữ nhật$\} = B$.

* $A \cup D = \{x \mid x$ là hình thoi hoặc x là hình bình hành$\}$
$= \{x \mid x$ là hình bình hành$\} = D$.

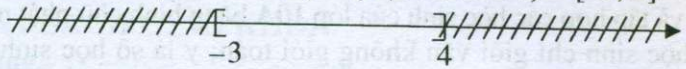
Ví dụ 3: Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $A = [-3; 1) \cup (0; 4]$ b) $B = (-2; 15) \cup (3; +\infty)$

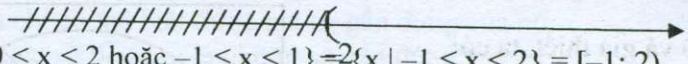
c) $C = (0; 2) \cup [-1; 1)$ d) $D = (-\infty; 1) \cup (-1; +\infty)$

Giải

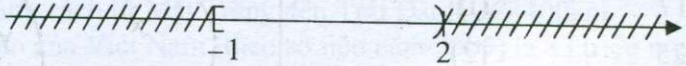
a) $A = \{x \mid -3 \le x < 1 \text{ hoặc } 0 < x \le 4\} = \{x \mid -3 \le x \le 4\} = [-3; 4]$.



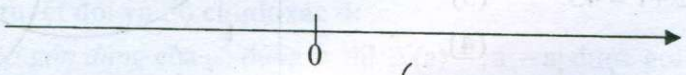
b) $B = \{x \mid -2 < x < 15 \text{ hoặc } x > 3\} = \{x \mid x > -2\} = (-2; +\infty)$.



c) $C = \{x \mid 0 < x < 2 \text{ hoặc } -1 \le x < 1\} = \{x \mid -1 \le x < 2\} = [-1; 2)$.



d) $D = \{x \mid x < 1 \text{ hoặc } x > -1\} = \mathbb{R}$.



Ví dụ 4:

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

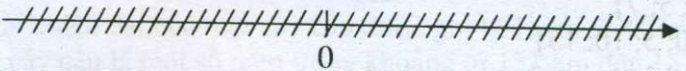
a) $M = [-12; 3) \cap (-1; 4]$ b) $N = (4; 7) \cap (-7; -4)$

c) $P = (2; 3) \cap [3; 5)$ d) $Q = (-\infty; 1) \cap (-1; +\infty)$

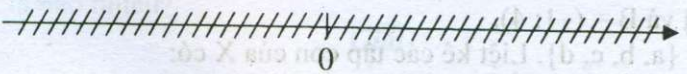
Giải

a) $M = \{x \mid -12 \le x < 3 \text{ và } -1 < x \le 4\} = \{x \mid -1 < x < 3\} = (-1; 3)$.

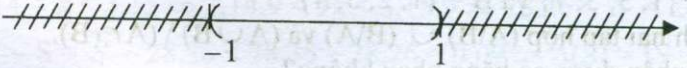
b) $N = \{x \mid 4 < x < 7 \text{ và } -7 < x < -4\} = \varnothing$.



c) $P = \{x \mid 2 < x < 3 \text{ và } 3 \le x < 5\} = \varnothing$.



d) $Q = \{x \mid x < 1 \text{ và } x > -1\} = \{x \mid -1 < x < 1\} = (-1; 1)$.



***Vấn đề 2:* Giải bài toán bằng biểu đồ Ven**

1. Phương pháp:

* Vẽ các vòng tròn đại diện các tập hợp (mỗi vòng tròn là một tập hợp), lưu ý 2 vòng tròn có phần chung nếu giao của 2 tập hợp khác rỗng.

* Dùng các biến để chỉ số phần tử của từng phần không giao nhau.

* Từ giả thiết bài toán, lập hệ phương trình và giải tìm các biến.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 5:

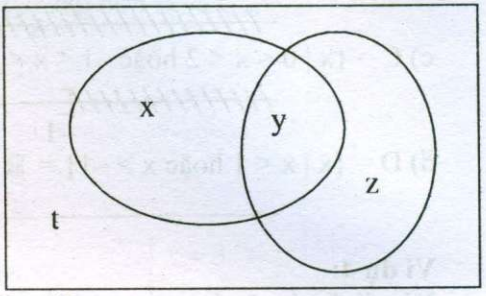
Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi văn, 25 bạn học sinh giỏi toán. Tìm số học sinh đạt cả 2 giải văn và toán, biết lớp 10A có 45 học sinh và có 13 học sinh không đạt học sinh giỏi.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL /13318/ 14

Giải

Biểu diễn tập hợp các học sinh giỏi văn và tập hợp các học sinh giỏi toán bằng hai đường cong kín và tập hợp các học sinh của lớp 10A bằng hình chữ nhật như ở hình bên.

Gọi x là số học sinh chỉ giỏi văn không giỏi toán; y là số học sinh giỏi cả văn và toán; z là số học sinh chỉ giỏi toán mà không giỏi văn và t là số học sinh không đạt học sinh giỏi.



Theo biểu đồ và giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} x+y=17 & (1) \\ y+z=25 & (2) \\ x+y+z+t=45 & (3) \\ t=13 & (4) \end{cases}$$

Cộng (1) với (2) rồi trừ cho (3) ta được:

$(x + y) + (y + z) - (x + y + z + t) = 17 + 25 - 45$

$\Rightarrow y - t = -3 \Rightarrow y = t - 3 = 10.$

Vậy lớp 10A có 10 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Toán.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Viết các tập sau bằng phương pháp liệt kê:

a) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (4x - x^2)(9x^2 - 10x + 1) = 0\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < n^2 < 36\}$.

Bài 2. Viết các tập sau bằng phương pháp nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$

b) $B = \{-5; 0; 5; 10; 15\}$

Bài 3. Xét quan hệ "$\subset$" giữa các tập hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x - 12\} = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$

b) $A = [0; 3]$ và $B = (-1; 4)$.

Bài 4. Cho $X = \{a, b, c, d\}$. Liệt kê các tập con của X có:

a) 3 phần tử b) 2 phần tử c) không quá 1 phần tử.

Bài 5. Cho $A = \{1; 3; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Hãy xác định hai tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Hai tập hợp nhận được có bằng nhau không?

Bài 6. Cho $A = [-5; 2]$ và $B = (-3; 4)$. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Bài 7. Cho $A = (0; 2]$, $B = [1; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Bài 8. Cho hai tập hợp $A = [a; a + 2)$, $B = (5; 6)$. Tìm tất cả các giá trị của a để:

a) $A \subset B$ b) $B \subset A$ c) $A \cap B = \varnothing$.

Bài 9. Biểu diễn các tập sau thành hợp các khoảng hay đoạn:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 4\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 3 \text{ và } |x| \leq 5\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{|x-2|} > 1\right\}$.

Bài 10. Cho hai tập hợp $A = (2; 7 - m]$ và $B = (m - 1; +\infty)$. Xác định m để:

a) $A \subset B$ b) $A \cap B \neq \varnothing$ c) $A \cup B = (1; +\infty)$.

§4. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết được giá trị đúng của đại lượng mà ta đang quan tâm mà chỉ có thể biết được giá trị gần đúng của nó.

Ví dụ 1: Các số liệu sau là những số gần đúng:

- Khoảng cách từ Mặt Trăng đến Trái Đất là 384400km.
- Số dân của Việt Nam (theo số liệu năm 2005) là 83 triệu người.

2. Sai số

a) Sai số tuyệt đối và độ chính xác d:

Nếu a là *số gần đúng* của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta(a) = |\bar{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.

Thông thường ta không biết được số đúng $\bar{a}$ nên cũng không tính được $\Delta(a)$ mà chỉ ước lượng được $\Delta(a)$ không vượt quá một số dương d nào đó.

Khi đó $\Delta(a) \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant \bar{a} - a \leqslant d \Leftrightarrow a - d \leqslant \bar{a} \leqslant a + d$. Điều đó có nghĩa là số đúng $\bar{a}$ dao động từ $a - d$ đến số $a + d$ và do đó ta nói a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác d, quy ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$.

Ví dụ 2: Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$, điều đó có nghĩa là gì?

Giải

Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$ có nghĩa là chiều dài đúng của cây cầu là một số nằm trong khoảng từ 151,8m đến 152,2m.

Ví dụ 3: Khi tính diện tích hình tròn bán kính R = 3cm, nếu lấy $\pi = 3,14$ thì độ chính xác là bao nhiêu?

Giải

Ta có diện tích hình tròn $S = 3,14.3^2 = 28,26$ và $\bar{S} = \pi.3^2 = 9\pi$.

Ta có: $3,14 < \pi < 3,15 \Rightarrow 3,14.9 < 9\pi < 3,15.9 \Rightarrow 28,26 < \bar{S} < 28,35$

Do đó: $\bar{S} - S = \bar{S} - 28,26 < 28,35 - 28,26 = 0,09 \Rightarrow \Delta(S) = |\bar{S} - S| < 0,09$.

Vậy nếu ta lấy $\pi = 3,14$ thì diện tích hình tròn là $S = 28,26cm^2$ với độ chính xác $d = 0,09$.

b) Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a là $\delta(a) = \dfrac{\Delta(a)}{|a|}$.

Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta(a) \leqslant d$. Do đó $\delta(a) \leqslant \dfrac{d}{|a|}$.

Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ví dụ 4: Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu trong Ví dụ 2.

Giải

Trong phép đo chiều dài cây cầu ở Ví dụ 2 thì sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{0,2}{152} = 0,1316\%.$$

Ví dụ 5: Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được 250 ± 0,2 m. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được 15 ± 0,1 m. Trong hai bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn?

Giải

Phép đo của bạn A có sai số tương đối $\delta_1 \le \frac{0,2}{250} = 0,0008 = 0,08\%$.

Phép đo của bạn B có sai số tương đối $\delta_2 \le \frac{0,1}{15} = 0,0066 = 0,66\%$.

Như vậy phép đo của bạn A có độ chính xác cao hơn.

3. Số quy tròn

a) Quy tắc làm tròn số

Tùy mức độ cho phép, ta có thể quy tròn một số đến hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ... hay đến hàng phần chục, hàng phần trăm, ... (gọi là hàng quy tròn) theo nguyên tắc sau:

- Nếu chữ số *ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5* thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số *ngay sau hàng quy tròn lớn hơn bằng 5* thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng quy tròn.

Ví dụ 6: Các số quy tròn của số x theo từng hàng cho trong bảng sau:

Quy tròn đến	hàng chục	hàng đơn vị	hàng phần chục	hàng phần trăm	hàng phần nghìn
x = 549,2705	550	549	549,3	549,27	549,271
x = 397,4619	400	397	397,5	397,46	397,462

Nhận xét:

Khi thay số đúng bởi số quy tròn thì sai số tuyệt đối không vượt quá *nửa đơn vị* của hàng quy tròn.

Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì ta quy tròn số a đến hàng lớn hơn hàng của d một đơn vị

b) Cách viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

Ví dụ 7: Cho số gần đúng a = 2 851 275 với độ chính xác d = 300.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng *trăm* nên ta quy tròn a đến hàng *nghìn*, vậy số quy tròn của a là 2 851 000.

Ví dụ 8: Cho số gần đúng a = 5,2463 với độ chính xác d = 0,001.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng *phần nghìn* nên ta quy tròn a đến hàng *phần trăm*, vậy số quy tròn của a là 5,25.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Chiều dài của một con đường được ghi là 1745,25m ± 0,01m. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi:

a) $\sqrt[3]{15}.12^4$ (lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

b) $\left(\sqrt[3]{42}+\sqrt[3]{37}\right):14^5$ (lấy 7 chữ số ở phần thập phân)

Bài 3. Trong các số $\frac{17}{12}, \frac{99}{70}$ dùng để xấp xỉ số $\sqrt{2}$, hãy đánh giá sai số tuyệt đối của các số gần đúng này và chọn số gần đúng tốt nhất.

Bài 4. Cho $\bar{a} = \frac{1}{1+x}$, $0 < x < 1$. Giả sử ta lấy số $a = 1 - x$ làm giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Hãy tính sai số tương đối của a theo x.

§ 5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1. Phát biểu nào sau đây là mệnh đề:

a) Phở là một món ăn của người Việt Nam.

b) Hôm qua, trời đẹp quá.

c) $6 : 2 = 5 - 3$.

d) $6 - 2 = 3 + 5$.

e) $9 \geqslant 9$.

Bài 2. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) 2007 là số nguyên tố.

b) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ vô nghiệm.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ chia hết cho 2.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Bài 3. Cho mệnh đề: "Nếu tam giác cân thì nó có hai đường trung tuyến bằng nhau."

a) Chứng minh mệnh đề trên đúng.

b) Phát biểu mệnh đề trên dùng thuật ngữ "điều kiện cần".

c) Phát biểu mệnh đề trên dùng thuật ngữ "điều kiện đủ".

d) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai.

Bài 4. Cho: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leqslant 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0\}$;

$C = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}, -1 \leqslant n \leqslant 2\}$.

a) Liệt kê các phần tử của A, B, C.

b) Xác định các tập hợp sau và so sánh:

i) $(A \cup B) \cup C$; $A \cup (B \cup C)$.

ii) $(A \cap B) \cap C$; $A \cap (B \cap C)$.

iii) $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

iv) $A \cap (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài 5. Cho ba tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 2\}$

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

$(A \cup B) \cup C$; $(A \cap B) \cap C$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap C) \cup B$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 1
MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§ 1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

***Vấn đề 1:* Xác định một phát biểu có là mệnh đề. tính đúng sai của mệnh đề.**

Bài 1.

a) Là mệnh đề sai.

b) Là mệnh đề đúng.

c) Không là mệnh đề vì đây chỉ là câu hỏi.

d) Không là mệnh đề vì đây là câu cảm thán.

e) Là mệnh đề đúng.

f) Là mệnh đề đúng.

g) Là mệnh đề sai.

h) Là mệnh đề đúng.

i) Là mệnh đề đúng.

k) Là mệnh đề đúng.

l) Không là mệnh đề.

m) Là mệnh đề sai.

Bài 2.

a) Tồn tại một số chất khí có dẫn điện.

b) Nhà toán học Cauchy không phải là người Ý.

c) 9801 không phải là số chính phương.

d) Giải thưởng cao nhất về toán học trên thế giới không phải là giải Nobel.

e) Không phải có vô số số nguyên tố.

f) Nói một năm có tối đa 52 ngày chủ nhật là sai.

Bài 3.

a) $(P \Rightarrow Q)$: " Nếu tam giác ABC vuông tại A thì độ dài trung tuyến AM bằng một nửa cạnh BC".

Ta thấy nếu P đúng thì ΔABC vuông tại A. Khi đó $AM = \frac{1}{2}BC$ nên Q đúng. Do đó $(P \Rightarrow Q)$ là mệnh đề đúng.

b) $(P \Leftrightarrow Q)$: " Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi độ dài trung tuyến AM bằng một nửa cạnh BC".

Ta thấy nếu P đúng thì Q cũng đúng và nếu P sai thì Q cũng sai. Do đó P và Q cùng đúng hoặc cùng sai. Do đó $(P \Leftrightarrow Q)$ là mệnh đề đúng.

Bài 4.

a) (P $\Rightarrow$ Q): " Nếu 120 chia hết cho 6 và chia hết cho 8 thì 120 chia hết cho 6.8"

Ta thấy: P là mệnh đề đúng và Q là mệnh đề sai. Vậy (P $\Rightarrow$ Q) sai.

b) (P $\Leftrightarrow$ Q): " 120 chia hết cho 6 và chia hết 8 khi và chỉ khi 120 chia hết cho 6.8"

Ta thấy: P là mệnh đề đúng và Q là mệnh đề sai. Vậy (P $\Leftrightarrow$ Q) sai.

***Vấn đề 2:* Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề**

Bài 1.

* $\overline{A}$ = "Tồn tại ít nhất một số thực không phải là số nguyên". Ta có $\overline{A}$ là mệnh đề đúng.

* $\overline{B}$ = "Mọi góc α ta luôn có $\sin \alpha \leq 1$". Ta có $\overline{B}$ là mệnh đề đúng.

* $\overline{C}$ = "Tồn tại một tam giác đều không phải là tam giác cân". Ta có $\overline{C}$ là mệnh đề sai.

Bài 2.

a) $\overline{P}$ = "$\exists x \neq 0, x^2 + \frac{1}{x^2} < 2$". Ta có $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

b) $\overline{Q}$ = "Mọi hình thoi đều là hình vuông". Ta có $\overline{Q}$ là mệnh đề sai.

Bài 3.

a) P(0) = "$0 = 0^4$" là mệnh đề đúng.

b) P(1) = "$1 = 1^4$" là mệnh đề đúng.

c) P(2) = "$2 = 2^4$" là mệnh đề sai.

d) P(–1) = "$-1 = (-1)^4$" là mệnh đề sai.

e) ($\exists x \in \mathbb{Z}$, P(x)) = "$\exists x \in \mathbb{Z}, x = x^4$" là mệnh đề đúng (chẳng hạn với x = 1).

f) ($\forall x \in \mathbb{Z}$, P(x)) = "$\forall x \in \mathbb{Z}, x = x^4$" là mệnh đề sai (chẳng hạn lấy x = 2).

Bài 4.

a) $\overline{A}$ = "$\exists x \in \mathbb{R}, x - 2 \leq x^2$".

b) $\overline{B}$ = "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3".

c) $\overline{C}$ = "$\forall r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 \neq 0$".

d) $\overline{D}$ = "Mọi tứ giác đều có đường tròn ngoại tiếp".

Bài 5.

a) "$\exists x \in X$, P(x)" = "Có một số học sinh của lớp 10A tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong ngày".

b) "$\forall x \in X$, P(x)" = "Mọi học sinh của lớp 10A đều tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong ngày".

c) "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$" = "Có một số học sinh của lớp 10A không tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong ngày".

d) "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$" = "Mọi học sinh của lớp 10A đều không tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong ngày".

Bài 6.

a) A = "$\exists r \in \mathbb{Q}, 3 < r < \pi$" là mệnh đề đúng.

$\overline{A}$ = "$\forall r \in \mathbb{Q}, r \leq 3$ hay $r \geq \pi$".

b) B = "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 > 0$" là mệnh đề đúng.

$\overline{B}$ = "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 \leq 0$".

c) C = "$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 2$" là mệnh đề sai.

$\overline{C}$ = "$\exists n \in \mathbb{N}, 2^n < n + 2$".

d) D = "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ chia hết cho 8" là mệnh đề sai.

$\overline{D}$ = "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 8".

§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

Bài 1.

a) * Phát biểu: Với mọi số tự nhiên n, nếu n là số chẵn thì 7n + 4 cũng là số chẵn.

* Chứng minh:

Ta có: n là số tự nhiên chẵn

$\Rightarrow$ 7n là số tự nhiên chẵn

$\Rightarrow$ 7n + 4 là số chẵn.

b) * Phát biểu định lí đảo:

Với mọi số tự nhiên n, nếu 7n + 4 là số chẵn thì n là số chẵn.

* Chứng minh định lí đảo:

Ta có: Với mọi $n \in \mathbb{N}$, 7n + 4 là số chẵn

$\Rightarrow$ 7n là số chẵn $\Rightarrow$ n là số chẵn.

c) * Phát biểu định lí thuận bằng hai cách:

Cách 1: "n là số tự nhiên chẵn là điều kiện đủ để 7n + 4 là số chẵn"

Cách 2: "Với số tự nhiên n, 7n + 4 là số chẵn là điều kiện cần để n là số chẵn"

* Phát biểu định lí đảo bằng hai cách:

Cách 1: "n là số tự nhiên chẵn là điều kiện cần để 7n + 4 là số chẵn"

Cách 2: "Với số tự nhiên n, 7n + 4 là số chẵn là điều kiện đủ để n là số chẵn"

Bài 2.

a) Hai tam giác đồng dạng là điều kiện đủ để chúng có các góc tương ứng bằng nhau.

b) Tứ giác ABCD là hình thoi là điều kiện đủ để tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc nhau.

c) a = b là điều kiện đủ để $a^2 = b^2$.

Bài 3.

a) Với mọi số nguyên n, n chia hết cho 3 là điều kiện cần để n^2 chia hết cho 3.

b) Tam giác ABC có đường trung tuyến từ đỉnh A cũng là đường cao là điều kiện cần để tam giác ABC cân tại A.

c) Một số nguyên dương lẻ được biểu diễn dưới dạng 4k + 1 ($k \in \mathbb{N}$) là điều kiện cần để số nguyên đó là số chính phương.

Bài 4.

a) Tam giác ABC vuông tại A là điều kiện cần và đủ để $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

b) Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn điều kiện cần và đủ để nó có tổng hai góc đối của nó bằng 180^0.

Bài 5.

a) Giả sử $\sqrt{2}$ không là số vô tỉ

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (m, n $\in$ N*, (m, n) = 1)

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ là số chẵn

$\Rightarrow$ m là số chẵn

$\Rightarrow m = 2k$ (k $\in$ N*)

$\Rightarrow n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow n^2$ là số chẵn

$\Rightarrow$ n là số chẵn $\Rightarrow$ (m, n) $\neq$ 1 (trái giả thiết).

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

b) Giả sử Δ ABC không phải là tam giác đều mà không có góc nào nhỏ hơn 60^0

$$\Rightarrow \begin{cases} A \geqslant 60^0 \\ B \geqslant 60^0 \\ C \geqslant 60^0 \end{cases} \Rightarrow A + B + C \geq 180^0$$

$\Rightarrow A = B = C = 60^0$ (vì $A + B + C = 180^0$)

$\Rightarrow \Delta$ ABC đều (trái giả thiết)

Vậy một tam giác không phải là tam giác đều thì nó có ít nhất một góc nhỏ hơn 60^0.

c) Cho a, b, c $\in \mathbb{R}$. Giả sử không có bất đẳng thức nào ba bất đẳng thức sau là đúng, nghĩa là : $a^2 + b^2 \geq 2bc$; $b^2 + c^2 \geq 2ca$; $c^2 + a^2 \geq 2ab$.

$\Rightarrow a^2 + b^2 < 2bc$; $b^2 + c^2 < 2ca$; $c^2 + a^2 < 2ab$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 < 2bc + 2ca + 2ab$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0$ (vô lí)

Vậy phải có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là đúng:

$a^2 + b^2 \geqslant 2bc$; $b^2 + c^2 \geqslant 2ca$; $c^2 + a^2 \geqslant 2ab$.

Bài 6.

▸ Phát biểu định lí đảo: "Nếu m, n là hai số nguyên dương và $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 thì m và n chia hết cho 3"

▸ Chứng minh:

Giả sử m, n nguyên dương, $m^2 + n^2$ chia hết cho 3. Ta chứng minh m chia hết cho 3 và n chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có thể viết $m = 3p \pm k$ (k = 0; 1) và $n = 3q \pm h$ (h = 0; 1)

$\Rightarrow m^2 + n^2 = 9p^2 \pm 6pk + k^2 + 9q^2 \pm 6qh + h^2$

$\Rightarrow m^2 + n^2 = 3[3p^2 + 3q^2 \pm 2kp \pm 2qh] + k^2 + h^2$ chia hết cho 3

$\Rightarrow k^2 + h^2$ chia hết cho 3

$\Rightarrow k = h = 0$

$\Rightarrow m = 3p$ và $n = 3q \Rightarrow m$ và n đều chia hết cho 3.

▸ Dùng thuật ngữ: điều kiện cần và đủ " ta phát biểu gộp 2 định thuận và đảo như sau:

"Với m, n là hai số nguyên dương, m và n chia hết cho 3 là điều kiện cần và đủ để $m^2 + n^2$ chia hết cho 3"

Bài 7.

a) Điều kiện cần:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} f(0) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ -m \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 0$ thì $f(x) = -2x^2 + 2x = -2x(x - 1) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$

(Vì với $x \in [0; 1]$ thì $-2x \leq 0$ và $x - 1 \leq 0$).

Vậy $f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m = 0$.

b) Điều kiện cần:

$$g(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow \begin{cases} g(1) \geqslant 0 \\ g(2) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ -m \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 0$ thì $g(x) = -2x + 2\sqrt{x-1} + 2$

$$= -2(x - 1) + 2\sqrt{x-1} = -2\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - 1\right) \geq 0, \forall x \in [1; 2].$$

(vì với $x \in [1; 2]$ thì $-2\sqrt{x-1} \leqslant 0, \sqrt{x-1} - 1 \leqslant 0$)

Vậy $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 8.

a) Phương trình $x^4 - 4mx^2 + m^2 - 1 = 0$ (1)

Nhận xét: Nếu x là nghiệm của (1) thì –x cũng là nghiệm của (1).

Do đó: Nếu (1) có nghiệm duy nhất là x_0 thì $x_0 = -x_0$.

Suy ra $x_0 = 0$, thay vào (1) ta được $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$.

Đảo lại:

- $m = 1$: (1) $\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2 \Rightarrow m = 1$ (loại).
- $m = -1$: (1) $\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = -1$ (nhận).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -1$.

b) Phương trình $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = m$ (2)

Nhận xét: Nếu x là nghiệm của (2) thì –x cũng là nghiệm của (2).

Do đó: Nếu (2) có nghiệm duy nhất là x_0 thì $x_0 = -x_0$.

Suy ra $x_0 = 0$, thay vào (2) ta được $m = 3$.

Đảo lại: $m = 1$: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$.

Đặt $1 - x^2 = u^6$, ta được:

(2) $\Leftrightarrow u^3 + 2u^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 + 3u + 3) = 0$

$\Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $m = 3$ (nhận)

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 3$.

c) Hệ phương trình (I) $\begin{cases} 3x^2 + mxy = m^2 - 1 \\ (m+2)x^2 + 4y^2 = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$

Nhận xét: Nếu (x; y) là nghiệm của (I) thì (–x; –y) cũng là nghiệm của (I).

Do đó: Nếu (I) có nghiệm duy nhất là $(x_0; y_0)$ thì $x_0 = -x_0$ và $y_0 = -y_0$.

Suy ra $x_0 = y_0 = 0$, thay vào (I) ta được

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = -1 \ hay \ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Đảo lại: m = –1:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - xy = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4y^2 = 0 \end{cases} hay \begin{cases} y = 3x \\ x^2 + 4(3x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy m = –1 (nhận)

Vậy (I) có nghiệm duy nhất ⇔ m = –1.

d) Hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - |y| = m \\ \sqrt{x^2+9} + |x| = \sqrt{9-y^2} + m - 1 \end{cases}$ (*)

Nhận xét: Nếu (x; y) là nghiệm của (*) thì (–x; –y) cũng là nghiệm của (*).

Do đó: Nếu (*) có nghiệm duy nhất là $(x_0; y_0)$ thì $x_0 = -x_0$ và $y_0 = -y_0$.

Suy ra $x_0 = y_0 = 0$, thay vào (*) ta được m = 1.

Đảo lại: m = 1:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - |y| = 1 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+9} + |x| = \sqrt{9-y^2} \quad (2) \end{cases}$$

Ta có: Vế trái (2) ≥ 3. Dấu "=" xảy ra ⇔ x = 0.

Vế phải (2) ≤ 3. Dấu "=" xảy ra ⇔ y = 0.

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} VT(2) = 3 \\ VP(2) = 3 \end{cases}$ ⇔ x = y = 0.

Thay vào (1) ta thấy x = y = 0 thỏa (1). Vậy (*) có nghiệm duy nhất là (0; 0).

Vậy m = 1 (nhận)

Vậy (*) có nghiệm duy nhất ⇔ m = 1.

Bài 9. $x^2 + ax + b = 0$ (1) và $x^2 + cx + d = 0$ (2).

Ta có: $\Delta_1 = a^2 - 4b$; $\Delta_2 = c^2 - 4d$.

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + c^2 - 4(b + d) \geq 2ac - 4(b + d) = 2[ac - 2(b + d)] \geq 0$.

Giả sử ngược lại rằng cả hai phương trình đều vô nghiệm

$\Rightarrow \Delta_1 < 0$ và $\Delta_2 < 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 < 0$ (vô lí).

Vậy phải có ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 10. Giả sử không có số nào trong ba số $|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|$ số lớn hơn hay bằng $\frac{1}{2}$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} |f(0)| = |b| < \dfrac{1}{2} \\ |f(1)| = |a+b+1| < \dfrac{1}{2} \\ |f(-1)| = |-a+b+1| < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < b < \dfrac{1}{2} & (1) \\ -\dfrac{3}{2} < a+b < -\dfrac{1}{2} & (2) \\ -\dfrac{3}{2} < -a+b < -\dfrac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (2) và (3) ta được

$-3 < 2b < -1 \Rightarrow b < -\dfrac{1}{2}$ (vô lí vì theo (1) thì $b > -\dfrac{1}{2}$.

Vậy trong ba số $|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|$ có ít nhất một số lớn hơn hay bằng $\dfrac{1}{2}$.

Bài 11.

Đặt a + b + c > 0 (1); ab + bc + ca > 0 (2) và abc > 0 (3).

Giả sử trong ba số a, b, c có một số âm hay bằng 0. Giả sử số đó là a.

Khi đó: (1) $\Rightarrow$ b + c > –a $\geq$ 0 $\Rightarrow$ a(b + c) $\leq$ 0.

Do đó (2) $\Rightarrow$ bc + a(b + c) > 0 $\Rightarrow$ bc > –a(b + c) $\geq$ 0 mà a < 0 $\Rightarrow$ abc < 0 (vô lí vì abc > 0 do (3)).

Vậy trong ba số a, b, c không có số nào nhỏ hơn hay bằng 0

$\Rightarrow$ Cả ba số a, b, c đều dương.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Bài 1.

a) Ta có: $(4x - x^2)(9x^2 - 10x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - x^2 = 0 \\ 9x^2 - 10x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 1 \\ z = \dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

Vì x $\in$ N* nên ta nhận hai giá trị x = 1, x = 4. Vậy A = {1; 4}.

b) Ta có n $\in$ $\mathbb{Z}$ và $3 < n^2 < 39$ nên $n^2 \in \{4; 9; 16; 25\}$.

Do đó n $\in$ {–2; 2; –3; 3; –4; 4; –5; 5}.

Vậy B = {–2; 2; –3; 3; –4; 4; –5; 5}.

Bài 2.

a) Ta có thể viết tập hợp A theo các cách sau:

Cách 1: A = {x | x là số nguyên tố nhỏ hơn 10}

Cách 2: A = {x $\in$ $\mathbb{R}$ | (x – 2)(x – 3)(x – 5)(x – 7) = 0}.

Cách 3: A = {x | x là các chữ số của số 2357}.

...

b) Ta có thể viết tập hợp B theo các cách sau:

Cách 1: $B = \{x \mid x = 5k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -1 \le k \le 3\}$.

Cách 2: $B = \{x \mid (x^3 - 25x)(x^2 - 25x + 150) = 0\}$

....

Bài 3.

a) Ta có: $A = \{-1; 3; -3; 4\}$ và $B = \{3; 4\}$. Do đó $B \subset A$.

b) Ta có với $x \in A$ thì $0 \le x \le 3 \Rightarrow -1 < x < 4 \Rightarrow x \in B$. Mặt khác $x = 4 \in B$ nhưng $x = 4 \notin A$. Vậy $A \subset B$.

Bài 4.

a) Các tập con của X có 3 phần tử là:

{a; b; c}, {a; b; d}, {a; c; d}, {b; c; d}.

b) Các tập con của X có 2 phần tử là:

{a; b}, {a; c}, {a; d}, {b; c}, {b; d}, {c; d}.

c) Các tập con của X có không quá 1 phần tử là:

$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {d}.

Bài 5.

Ta có: $A \backslash B = \{5; 7\}$ và $B \backslash A = \{2; 4\}$. Suy ra $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{2; 4; 5; 7\}$.

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$ và $A \cap B = \{1; 3\}$. Suy ra:

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2; 4; 5; 7\}$.

Ta thấy $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Bài 6.

* $A \cup B = \{x \mid -5 \le x \le 2 \text{ hoặc } -3 < x < 4\}$
  $= \{x \mid -5 \le x < 4\} = [-5; 4)$.
* $A \cap B = \{x \mid -5 \le x \le 2 \text{ và } -3 < x < 4\}$
  $= \{x \mid -3 < x \le 2\} = (-3; 2]$.
* $A \setminus B = \{x \mid -5 \le x \le 2 \text{ và } (x \le -3 \text{ hay } x \ge 4)\}$
  $= \{x \mid -5 \le x \le -3\} = [-5; -3]$.
* $B \setminus A = \{x \mid -3 < x < 4 \text{ và } (x < -5 \text{ hay } x > 2)\}$
  $= \{x \mid 2 < x < 4\} = (2; 4)$.

Bài 7.

* Ta có $A \cup B = (0; 4) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \mathbb{R} \backslash (A \cup B) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
* Ta có $A \cap B = [1; 2] \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \mathbb{R} \backslash (A \cap B) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Bài 8.

a) $A \subset B \Leftrightarrow 5 < a < a + 2 < 6 \Leftrightarrow a > 5$ và $a < 4 \Leftrightarrow a \in \varnothing$.

b) $B \subset A \Leftrightarrow a \le 5 < 6 \le a + 2 \Leftrightarrow a \le 5$ và $a \ge 4 \Leftrightarrow 4 \le a \le 5$.

c) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2 \leqslant 5 \\ a \geqslant 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leqslant 3 \\ a \geqslant 6 \end{array}\right.$.

Bài 9.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \text{ hay } -4 < x < -2\} = (-4; -2) \cup (2; 4)$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \le -3 \text{ hay } x \ge 3) \text{ và } (-5 \le x \le 5)\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid (-5 \le x \le -3) \text{ hoặc } (3 \le x \le 5)\} = [-5; -3] \cup [3; 5]$.

Bài 10.

a) $A \subset B \Leftrightarrow m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$.

b) $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow m - 1 < 7 - m \Leftrightarrow 2m < 8 \Leftrightarrow m < 4$.

c) Vì $A \subset (1; +\infty)$ nên $A \cup B = (1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

§4. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

Bài 1.

Vì độ chính xác d = 0,01 (đến hàng phần trăm) nên ta quy tròn số a đến hàng phần chục. Vậy số quy tròn của 1745,25 là 1745,3 (m).

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi:

a) 51139,3736 b) 0,0001266

Bài 3.

Ta có: $\bar{a} = \sqrt{2}$; $a_1 = \frac{17}{12} \Rightarrow \Delta(a_1) = \left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < 0,00245 = d_1$.

$\bar{a} = \sqrt{2}$; $a_2 = \frac{99}{70} \Rightarrow \Delta(a_2) = \left|\sqrt{2} - \frac{99}{70}\right| < 0,00007 = d_2$.

Ta thấy $d_2 < d_1$ nên $\frac{99}{70}$ là số gần đúng tốt hơn $\frac{17}{12}$.

Bài 4. Ta có: $\Delta(a) = \left|a - \bar{a}\right| = \left|1 - x - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{x^2}{1+x}\right|$

Sai số tương đối của số gần đúng a là

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} = \left|\frac{x^2}{1+x}\right|\left|\frac{1+x}{1}\right| = x^2.$$

§ 5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1.

a) Là mệnh đề. b) Không là mệnh đề.

c) Là mệnh đề. d) Là mệnh đề.

e) Là mệnh đề.

Bài 2.

a) Là mệnh đề sai. b) Là mệnh đề sai.

c) Là mệnh đề đúng, vì $n^2 - n = n(n - 1)$ là hai số nguyên liên tiếp.

d) Là mệnh đề đúng, vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.

a) Gọi P = "Tam giác ABC là tam giác cân"

Q = "Tam giác ABC có hai trung tuyến bằng nhau"

Khi đó mệnh đề đã cho có dạng "$P \Rightarrow Q$".

Ta thấy: Nếu P đúng thì Q cũng đúng nên "$P \Rightarrow Q$" là mệnh đề đúng.

b) Tam giác có hai trung tuyến bằng nhau là điều kiện cần để tam giác đó cân"

c) Tam giác cân là điều kiện đủ để tam giác đó có hai trung tuyến bằng nhau"

d) Mệnh đề đảo: "Nếu tam giác có hai trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân". Mệnh đề đảo đúng.

Bài 4.

a) Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}$.

$B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

$C = \{-2; 0; 2; 4\}$.

b) i/ Ta có: $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow (A \cup B) \cup C = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

$B \cup C = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow A \cup (B \cup C) = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Ta thấy $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

ii/ Ta có: $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow (A \cap B) \cap C = \{0; 2\}$.

$B \cap C = \{0; 2\} \Rightarrow A \cap (B \cap C) = \{0; 2\}$.

Ta thấy $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

iii/ Ta có: $B \cap C = \{0; 2\} \Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$

$A \cup C = \{-2; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Ta thấy $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

iv/ Ta có: $A \cap (B \cup C) = \{0; 1; 2; 3\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Ta thấy $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài 5.

Ta có: $A = (-3; 1)$, $B = [-1; 5]$ và $C = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Do đó:

- $A \cup B = (-3; 5] \Rightarrow A \cup B \cup C = R$.
- $A \cap B = [-1; 1) \Rightarrow A \cap B \cap C = \varnothing$.
- $(A \cup B) \cap C = (-3; -2] \cup [2; 5]$.
- $A \cap C = (-3; -2] \Rightarrow (A \cap C) \cup B = (-3; -2] \cup [-1; 5]$.

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Khái niệm về hàm số

1) Định nghĩa hàm số:

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}$, $(D \neq \varnothing)$.

Hàm số f xác định trên D là ***một quy tắc***, với mỗi số $x \in D$, tương ứng với một số y xác định duy nhất, số này phụ thuộc vào x, kí hiệu $f(x)$.

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Ta gọi: D là tập xác định (hay miền xác định).

x là biến số (hay đối số); $y = f(x)$ giá trị của hàm số f tại x.

2) Hàm số cho bằng biểu thức

Ví dụ: Với $f(x) = x^2 + 2x + 2$, ta có hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Chú ý: Nếu hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ***tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả những số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.***

3) Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị của hàm số f là tập hợp $(G) = \{(x, f(x)) | x \in D\}$

$$\mathbf{M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in D \text{ và } y_0 = f(x_0).}$$

II. Sự biến thiên của hàm số

1) Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Định nghĩa:

Ta kí hiệu K là một khoảng (nửa khoảng, hay đoạn) nào đó của $\mathbb{R}$.

* Hàm số f gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

* Hàm số f gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

* Hàm số f gọi hàm số hằng trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K: f(x_1) = f(x_2)$

2) Nhận xét về đồ thị

Nếu f là hàm số *đồng biến* trên K thì đồ thị *đi lên* (từ trái sang phải)
Nếu f là hàm số *nghịch biến* trên K thì đồ thị *đi xuống* (từ trái sang phải)
Nếu f là hàm số hằng trên K thì đồ thị là một đường thẳng (một phần của đường thẳng) *song song* hay *trùng* với trục Ox.

III. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

1) Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$

Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

2) Đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ

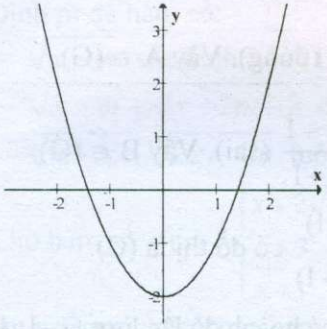
Ta có: – Nếu f là hàm số chẵn thì M(x; y) ∈ (G) thì M'(–x; y) ∈ (G).

– Nếu f là hàm số lẻ thì M(x; y) ∈ (G) thì M'(–x; –y) ∈ (G).

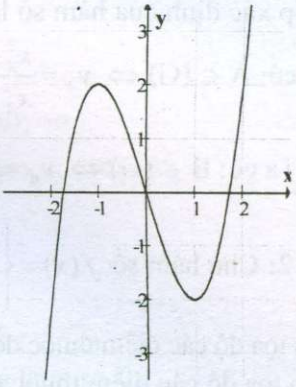
Do đó:

– Đồ thị của **hàm số chẵn** nhận **trục tung làm trục đối xứng** (hình 1)

– Đồ thị của **hàm số lẻ** nhận **gốc tọa độ làm tâm đối xứng** (hình 2)



Hình 1



Hình 2

IV. Phép tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Định lí:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G) và hai số dương p, q tùy ý. Khi đó:

1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$.

2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$.

3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.

4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Tìm tập xác định của hàm số y = f(x). Vị trí của một điểm đối với đồ thị.**

1. Phương pháp

a) Để tìm miền xác định ***của hàm số y = f(x)*** cần nhớ:

* $\frac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$;

* $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$;

* $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

b) Để xác định điểm M có thuộc đồ thị (G) của hàm số y = f(x) hay không ta thay x bởi x_M và y bởi y_M vào đẳng thức y = f(x) ta được $y_M = f(x_M)$ (*).

– Nếu (*) đúng thì M ∈ (G).

– Nếu (*) sai thì M ∉ (G).

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ có đồ thị (G)

a) Tìm miền xác định của hàm số.

b) Điểm nào sau đây thuộc đồ thị (G) của hàm số: A(2; 5), B(3; 10).

Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Ta có: $A\in(G)\Leftrightarrow y_A=\dfrac{x_A^2+1}{x_A-1}\Leftrightarrow 5=\dfrac{2^2+1}{2-1}$ (đúng). Vậy $A\in(G)$.

Ta có: $B\in(G)\Leftrightarrow y_B=\dfrac{x_B^2+1}{x_B-1}\Leftrightarrow 10=\dfrac{3^2+1}{3-1}$ (sai). Vậy $B\in(G)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & (x\leqslant 1)\\ \sqrt{x^2-1} & (x>1)\end{cases}$ có đồ thị là (C).

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị của hàm số f có hoành độ lần lượt là -1; 1 và $\sqrt{5}$.

b) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị của hàm số f có tung độ bằng 7.

Giải

a) * $M(-1; y_M)\in(C)$. Vì $x_M=-1<1$ nên ta thay $x=-1$ vào biểu thức x^2+x+1 ta được: $y_M=f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$. Vậy $M(-1; 1)$.

* $N(1; y_N)\in(C)$. Vì $x_N=1\leq 1$ nên ta thay $x=1$ vào biểu thức x^2+x+1 ta được: $y_N=f(1)=1^2+1+1=3$. Vậy $N(1; 3)$.

* $P(\sqrt{5}; y_P)\in(C)$. Vì $x_P=\sqrt{5}>1$ nên ta thay $x=\sqrt{5}$ vào biểu thức $\sqrt{x^2-1}$ ta được: $y_P=f(\sqrt{5})=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}=2$. Vậy $P(\sqrt{5}; 2)$.

b) Gọi $A\in(C)$ có $y_A=7$.

TH1: $x_A\leq 1$ ta có

$$y_A=x_A^2+x_A+1\Leftrightarrow x_A^2+x_A+1=7\Leftrightarrow x_A^2+x_A-6=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_A=-3\\ x_A=2\end{bmatrix}.$$

Do $x_A\leq 1$ nên ta nhận $x_A=-3$. Vậy $A(-3; 7)$.

TH2: $x_A>1$ ta có

$$y_A=\sqrt{x_A^2-1}\Leftrightarrow\sqrt{x_A^2-1}=7\Leftrightarrow x_A^2=50\Leftrightarrow x_A=\pm 5\sqrt{2}.$$

Vì $x_A>1$ nên ta nhận $x_A=5\sqrt{2}$. Vậy $A(5\sqrt{2}; 7)$.

Tóm lại có hai điểm trên (C) có tung độ bằng 7 là $A(-3; 7)$ và $A(5\sqrt{2}; 7)$.

3. Bài tập

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-1}$ d) $y = \sqrt{6-x} + \dfrac{1}{x^2-4}$

e) $y = \dfrac{4x-5}{(x-1)\sqrt{x+4}}$ f) $y = \dfrac{3x+5}{|x+1|+|x-1|}$

g) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{|x-2|-|x+2|}$ h) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x^2}$.

Bài 2. Định m để hàm số:

a) $y = \sqrt{x-m}$ xác định trên $(1; +\infty)$.

b) $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{x-2m-2}$ có tập xác định là $[0; +\infty)$.

c) $y = \sqrt{m-x} + \sqrt{2x-4m}$ luôn xác định với mọi $x \in (-4; -3)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 2\sqrt{1-x} & (x \leq 1) \\ \dfrac{x+3}{x+1} & (1 < x \leq 5) \end{cases}$

a) Tìm miền xác định của hàm số và tính $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.

b) Điểm nào dưới đây không thuộc đồ thị (C) của hàm số f:

$M(-1; 2\sqrt{2}-1)$, $N(1; 2)$, $P(3; 1)$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & (x \leq 1) \\ \dfrac{x^2-12}{x+2} & (x > 1) \end{cases}$ có đồ thị (G).

Tìm tọa độ các điểm $M \in (G)$ có tung độ bằng 3.

Vấn đề 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số y = f(x)

1. Phương pháp khảo sát sự biến thiên của hàm số trên khoảng K

a) Nếu hàm số được cho bằng biểu thức y = f(x):

- Với mọi $x_1, x_2 \in K$ và $x_1 \neq x_2$. Tính tỉ số $H = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- Xác định dấu của H và kết luận:

$H = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow$ Hàm số f đồng biến trên K.

$H = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow$ Hàm số f nghịch biến trên K.

- Bảng biến thiên là bảng ghi lại kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số.

b) Nếu hàm số được cho bởi đồ thị của nó thì ta xác định:

– Nếu trên khoảng K đồ thị đi lên từ trái sang phải thì trên K hàm số đồng biến.

– Nếu trên khoảng K đồ thị đi xuống từ trái sang phải thì trên K hàm số nghịch biến.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{6-2x}$. Hãy xét sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Giải

▸ Xét sự biến thiên:

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 3)(x_1 \neq x_2)$, ta có:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{6-2x_2}-\sqrt{6-2x_1}}{x_2-x_1}=\frac{-2}{\sqrt{6-2x_2}+\sqrt{6-2x_1}}<0$$

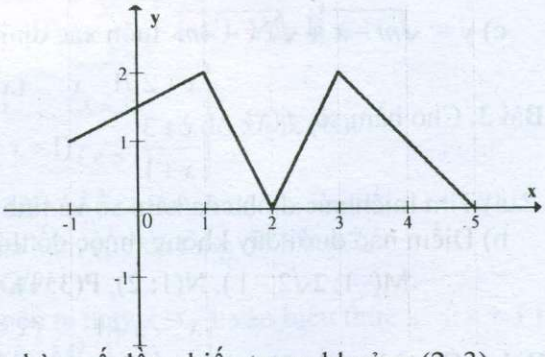
Vậy hàm số f nghịch biến trên $(-\infty; 3)$.

▸ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3
y	$+\infty$	↘	0

Ví dụ 2: Cho hàm số f xác định trên đoạn $[-1; 5]$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hãy cho biết sự biến thiên của hàm số f trên đoạn $[-1; 5]$.



Giải

* Với $x \in (-1; 1)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.

* Với $x \in (1; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trong khoảng $(1; 2)$.

* Với $x \in (2; 3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trong khoảng $(2; 3)$.

* Với $x \in (3; 5)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trong khoảng $(3; 5)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - 8x - 5$. Hãy xét sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

Giải

Với mọi x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2^2-8x_2-5-(2x_1^2-8x_1-5)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{2(x_2^2-x_1^2)-8(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=2(x_1+x_2)-8.$$

Do đó:

▸ Nếu $x_1, x_2 \in (-\infty; 4)$ thì $x_1 + x_2 < 8$ nên $H < 0$.

Suy ra f nghịch biến trong $(-\infty; 4)$.

▸ Nếu $x_1, x_2 \in (4; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 > 8$ nên $H > 0$.

Suy ra f đồng biến trong $(4; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y		↘		↗	

3. Bài tập

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 2x - 5$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{1}{1-x}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

d) $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}$ trên khoảng $(4; +\infty)$.

e) $y = |2x-4| + x$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Bài 2. Chứng minh:

a) Hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Hàm số $y = |x-1| + 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vấn đề 3: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số f(x)

1. Phương pháp

Bước 1:

Tìm miền xác định D.

– Nếu D không đối xứng qua 0 thì kết luận f không là hàm số chẵn hay lẻ.

– Nếu D đối xứng qua 0, ta thực hiện bước 2.

Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$.

– Nếu $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$: f là hàm số chẵn.

– Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$: f là hàm số lẻ.

– Nếu tồn tại $x_0 \in D$ mà $f(-x_0) \neq f(x_0)$ và $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ thì f không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét tính chẵn lẻ các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6$ b) $g(x) = |2x + 1| - |2x - 1|$

c) $h(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$ d) $k(x) = x^3 + |x|$

Giải

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và ta có:

$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 6 = 3x^4 - 5x^2 + 6 = f(x)$.

Vậy f là hàm số chẵn.

b) $g(x) = |2x + 1| - |2x - 1|$.

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và ta có:

$g(-x) = |-2x + 1| - |-2x - 1| = |2x - 1| - |2x + 1| = -g(x)$.

Vậy g là hàm số lẻ.

c) $h(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$.

* Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

* Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và ta có:

$h(-x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} = -h(x)$.

Vậy h là hàm số lẻ.

d) $k(x) = x^3 + |x|$.

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với mọi $x = 1 \in D$ thì $x = -1 \in D$ và ta có:

$k(-1) = 0$ mà $k(1) = 1$ nên $k(-1) \neq k(1)$ và $k(-1) \neq -k(1)$.

Vậy k là không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

3. Bài tập

Bài 1. Tìm miền xác định và xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

b) $y = \sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$

d) $y = \dfrac{|x-1| - |x+1|}{|x+2| - |x-2|}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{x^2+2x+2}}$

f) $y = |x+4| - \sqrt{x^2-8x+16}$

Vấn đề 4: Phép tịnh tiến đồ thị

1. Phương pháp

▸ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G) và hai số dương p, q tùy ý. Khi đó:

1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị (G_1): $y = f(x) + q$.

2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị (G_2): $y = f(x) - q$.

3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị (G_3): $y = f(x + p)$.

4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị (G_4): $y = f(x - p)$.

▸ Cho (G) của hàm số $f(x)$.

Để tìm hàm số có đồ thị (G') nhận được khi tịnh tiến đồ thị (G) *song song với Ox, rồi song song với Oy* thì ta làm như sau:

Bước 1: Tìm hàm số $g(x)$ biểu diễn đồ thị (G_1) là ảnh của (G) qua phép tịnh tiến song song với Ox.

Bước 2: Tìm hàm số $h(x)$ biểu diễn đồ thị (G') là ảnh của (G_1) qua phép tịnh tiến song song với Oy.

Khi đó (G') là đồ thị cần tìm.

▸ Cho hai hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G) và $y = g(x)$ có đồ thị (G').

Để xác định phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ biến đổi (G) thành (G'). Ta đồng nhất $f(x + k) + m = g(x)$ $\forall x$ để xác định k và m.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Với đồ thị (G) của mỗi hàm số sau đây, ta thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến thì sẽ được đồ thị của hàm số nào?

a) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ (G). Tịnh tiến (G) sang trái 3 đơn vị rồi tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị.

b) $y = f(x) = x^2 + 6x + 6$ (G). Tịnh tiến (G) sang phải 3 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 3 đơn vị.

Giải

a) Tịnh tiến (G) sang trái 3 đơn vị rồi tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị ta được đồ thị (G') của hàm số:

$$y = g(x) = f(x+3) - 2 = \frac{2(x+3)+1}{(x+3)-3} - 2 = \frac{2x+7}{x} - 2 = \frac{7}{x}$$

b) Tịnh tiến (G) sang trái 3 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 3 đơn vị ta được đồ thị (G') của hàm số

$$y = g(x) = f(x-3) + 3 = (x-3)^2 + 6(x-3) + 6 + 3 = x^2.$$

Ví dụ 2: Cho hai đồ thị (G): $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ và (G'): $y = 2x^2 + 1$.

Tìm các phép tịnh tiến song song các trục tọa độ để biến (G) thành (G').

Giải

Tịnh tiến (G) song song Ox k đơn vị và tịnh tiến song song Oy m đơn vị ta được đồ thị (G_1) của hàm số:

$$y = g(x) = f(x+k) + m = 2(x+k)^2 - 8(x+k) + 3 + m$$
$$= 2x^2 + (4k-8)x + 2k^2 - 8k + m + 3.$$

Do đó: (G_1) trùng với (G') $\Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 8 = 0 \\ 2k^2 - 8k + 3 + m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 6 \end{cases}$.

Vậy ta phải tịnh tiến đồ thị (G) sang trái 2 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 6 đơn vị thì ta được đồ thị (G').

3. Bài tập

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$ (G).

a) Tìm tập xác định của hàm số. Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

b) Chứng minh hàm số đồng biến trên (–2; 2).

c) Tịnh tiến (G) sang phải 1 đơn vị được đồ thị (G_1), rồi tiếp tục tịnh tiến (G_1) lên trên 2 đơn vị được (G_2). Hỏi (G_2) là đồ thị của hàm số nào?

Bài 2. Cho (G): $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$. Chứng minh rằng khi tịnh tiến đồ thị (G) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị (G') là đồ thị của một hàm số chẵn.

Bài 3. Cho đồ thị (G): $y = f(x) = \frac{-3}{x+1}$.

a) Tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Tịnh tiến (G) lên trên 4 đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

c) Tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị (G_1), tiếp tục tịnh tiến (G_1) lên trên 4 đơn vị ta được đồ thị (G_2). Hỏi (G_2) là đồ thị của hàm số nào?.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 2}$. Có thể tìm được số $p > 0$ sao cho khi tịnh tiến (G) sang trái hay sang phải p đơn vị thì được đồ thị của một hàm số lẻ không?

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Nhắc lại về hàm số bậc nhất

a) Hàm số bậc nhất: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

* Nếu $a > 0$: hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

* Nếu $a < 0$: hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

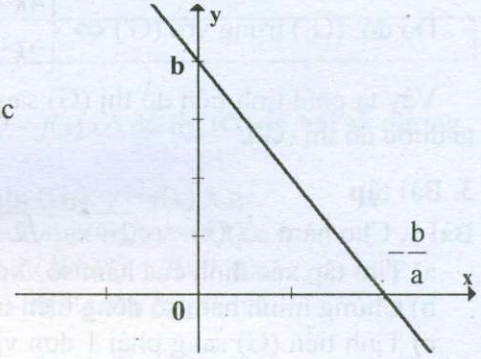
x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) Đồ thị: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng:

– Có hệ số góc bằng a;

– Không song song với các trục tọa độ;

– Cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm B(0; b).



c) Cho hai đường thẳng (d): $y = ax + b$ và (d'): $y = a'x + b'$ (a và $a' \neq 0$)

(d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$.

(d) // (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.

(d) $\equiv$ (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.

d) Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng AB không vuông góc với hai trục tọa độ thì hệ số góc của đường thẳng AB bằng $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2. Hàm số $y = |ax + b|$

a) Hàm số bậc nhất trên từng khoảng:

Là hàm số được cho bởi nhiều công thức mà trên mỗi khoảng thì hàm số nhận giá trị là một biểu thức bậc nhất theo biến x.

b) Hàm số $y = |ax + b|$:

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Ta có: $y = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -ax - b & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$.

Do đó: Đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ gồm 2 phần:

– Phần 1 là phần của đường thẳng $y = ax + b$ với $x \geq -\frac{b}{a}$.

– Phần 2 là phần của đường thẳng $y = -ax - b$ với $x < -\frac{b}{a}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Lập phương trình đường thẳng

1. Phương pháp:

a) Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc a có dạng: (d): $y - y_A = a(x - x_A)$.

b) Để lập phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B với $x_A \neq x_B$ ta làm như sau:

* Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$ (1)
* Thế tọa độ A và B vào (1) được hệ phương trình hai ẩn a và b.
* Giải hệ phương trình này, tính được a, b.

c) Ghi chú về hệ số góc:

* Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ có hệ số góc

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ với } x_B \neq x_A.$$

* Hai đường thẳng song song có hệ số góc bằng nhau.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm phương trình đường thẳng (d), biết rằng:

a) (d) đi qua hai điểm M(–2; 2) và N(4; –10).

b) (d) đi qua A(2; 1) và song song với đường thẳng (D): $y = 2x + 1$.

Giải

a) Ta có (d): $y = ax + b$.

(d) qua M và N nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = a.(-2) + b \\ -10 = a.4 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy (d): $y = -2x - 2$.

b) Ta có (d) // (D) nên (d): $y = 2x + b$ ($b \neq 1$).

Lại có (d) qua A(2; 1) $\Rightarrow 1 = 2.2 + b \Rightarrow b = -3$ (nhận).

Vậy (d): $y = 2x - 3$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (D): $y = (m^2 - 2)x + m - 1$. Xác định giá trị của m sao cho:

a) (D) song song với (d_1): $y = 2x + 1$

b) (D) cắt (d_2): $y = m(2x - 1) + 3 + x$.

Giải

a) (D) song song với $(d_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a_1 \\ b \neq b_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 2 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

b) Ta có (d_2): $y = m(2x - 1) + 3 + x = (2m + 1)x + 3 - m$.

Do đó (D) cắt $(d_2) \Leftrightarrow a \neq a_2$

$\Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \neq 0$.

$\Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 3$.

3. Bài tập

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng:

a) (d) đi qua hai điểm A, B với: A(–1; 3), B(4; –2).

b) (D) qua M(3; 5) và song song với đường thẳng (D'): $y = 3x - 2$.

c) (Δ) vuông góc với đường thẳng (Δ'): $y = \frac{1}{4}x + 3$ và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 3.

Bài 2. Cho hai đường thẳng (d_1): $y = -3x + 6$ và (d_2): $y = 2x + 1$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2).

b) Vẽ hai đường thẳng (d_1), (d_2) trong cùng một hệ trục tọa độ. Kiểm lại kết quả của câu a) bằng đồ thị.

Bài 3. Cho đường thẳng (d): $y = ax + b$. Trong mỗi trường hợp sau, xác định a và b sao cho:

a) (d) cắt đường thẳng (d_1): $y = \frac{3}{2}x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 4 và cắt đường thẳng (d_2): $y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 3

b) (d) đi qua điểm A(1; 5) và cắt đường thẳng (D): $y = -x + 3$ tại một điểm nằm trên trục tung.

Bài 4. Tìm phương trình đường thẳng (d) trong mỗi trường hợp sau:

a) (d) song song với (d_1): $y = \frac{1}{2}x$ và (d) cắt (d_2): $y = 2x - 8$ tại một điểm trên trục hoành.

b) (d) song song với đường thẳng (D): $y = \frac{2}{3}x$ và qua giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 3x - 2$.

Bài 5. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm I(2; –1), cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho I là trung điểm của AB.

a) Xác định tọa độ hai điểm A và B.

b) Viết phương trình đường thẳng (d).

Bài 6.

a) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua I(1; 3), cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B có tọa độ dương và tạo với hai trục tọa độ thành một tam giác vuông cân.

b) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua I(3; 2), cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm có tọa độ dương và tạo với hai trục này thành một tam giác có diện tích bằng 16 (đvdt).

Bài 7. Tính giá trị của m để ba đường thẳng sau đây phân biệt và đồng quy:

(d_1): $y = 2x - 1$; (d_2): $y = mx - m$; (d_3): $y = 3x - m$.

Bài 8. Tìm điểm A sao cho đường thẳng (d): $y = mx - 2 - 4m$ luôn đi qua A, dù lấy bất cứ giá trị nào.

Vấn đề 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên từng khoảng

1. Phương pháp

– Trên mỗi khoảng, xác định dấu của a trong biểu thức tương ứng, suy ra tính biến thiên của hàm số trong khoảng đó.

– Lập bảng biến thiên của hàm số, ghi các kết quả đã xét trên.

– Vẽ các phần của các đường thẳng tương ứng trên mỗi khoảng, ta được đường gấp khúc là đồ thị của hàm số cần vẽ.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị của hàm số sau đây: $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & (-2 \leqslant x \leqslant 1) \\ -2x+4 & (1 < x \leqslant 2) \\ 2x-4 & (2 < x \leqslant 4) \end{cases}$.

Hãy cho biết miền xác định, lập bảng biến thiên, giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số.

Giải

* Tập xác định: D = [–2; 4].

* Ta có:

– Trong (–2; 1), f(x) = x + 1 có a = 1 > 0 nên f(x) đồng biến trong (–2; 1).

– Trong (1; 2), f(x) = –2x + 4 có a = –2 < 0 nên f(x) nghịch biến trong (1; 2)

– Trong (2; 4), f(x) = 2x – 1 có a = 2 > 0 nên f(x) đồng biến trong (2; 4).

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	–2		1		2		4
f(x)	–1	↗	2	↘	0	↗	4

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số trên [–2; 4] là 4 đạt được khi x = 4.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [–2; 4] là –1 đạt được khi x = –2.

3. Bài tập

Bài 1. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{khi } x < 0 \\ 3-2x & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x-5 & \text{khi } x > 2 \end{cases}.$$

Bài 2. Viết mỗi hàm số sau đây dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng, vẽ đồ thị và xét sự biến thiên của các hàm số:

a) $y = |x-2| - 2x$ b) $y = 2|x+2| - |x| + 1$.

Vấn đề 3: Vẽ đồ thị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

– Ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối để viết hàm số dưới dạng hàm bậc nhất trên từng khoảng.

– Vẽ đồ thị mỗi hàm bậc nhất trên khoảng tương ứng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = |2x - 4|$.

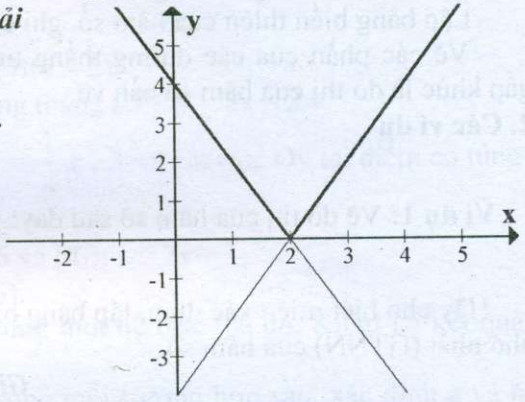
Tìm miền xác định của hàm số. Viết biểu thức của f dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng để vẽ đồ thị của hàm số này rồi lập bảng biến thiên của f.

Giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Ta có: $y = f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

* Vẽ đồ thị (G) của f(x):



Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

* Dựa vào bảng biến thiên ta có:
  - Trên $(-\infty; 2)$, đồ thị (G) đi xuống nên f(x) nghịch biến trong $(-\infty; 2)$.
  - Trên $(2; +\infty)$, đồ thị (G) đi lên nên f(x) đồng biến trong $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị (G) của hàm số sau: $y = 2x + 1 - |x - 2|$

Giải

Ta có: $y = \begin{cases} 2x + 1 - (x - 2) & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x + 1 + (x - 2) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

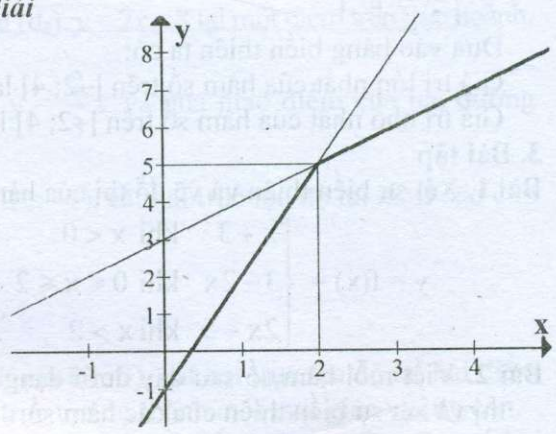
$= \begin{cases} x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (G) gồm 2 phần:

– Phần 1 là phần của đường thẳng (d): $y = x + 3$ với $x \geq 2$.

– Phần 2 là phần của đường thẳng (D): $y = 3x - 1$.

Ta có (G) có dạng sau:



3. Bài tập

Bài 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = |x - 3|$ b) $y = |2 - 2x|$.

c) $y = |2x - |x - 3||$ d) $y = |x + 1| + |2x - 4|$.

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và tìm các khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số:

a) $y = |x - 2| - 2x$ b) $y = |2 - 2x| + x$

c) $y = |2x - |x| - 3|$ d) $y = |x - 2| + |2x - 4|$.

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bằng biểu thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

2. Đồ thị

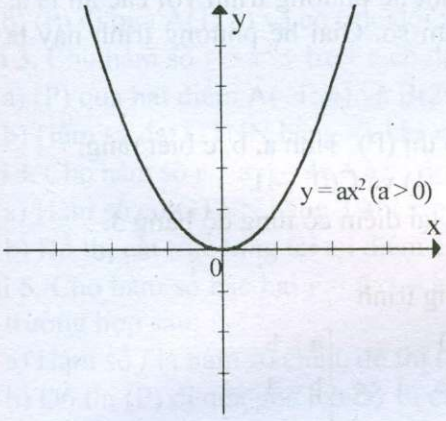
a) Đồ thị của hàm số $y = ax^2$

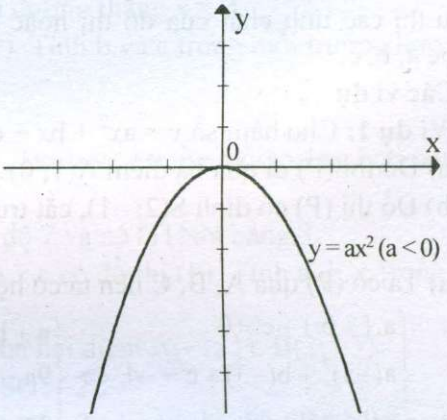
Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ là một parabol (P) có:

– Đỉnh là gốc tọa độ O

– Trục đối xứng là trục Oy

– Bề lõm hướng lên khi $a > 0$ và hướng xuống dưới khi $a < 0$





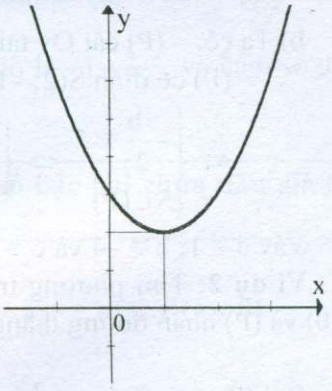
b) Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Tính chất của đồ thị:

– Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

– Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$

– Bề lõm hướng lên khi $a > 0$,
hướng xuống khi $a < 0$



3. Sự biến thiên

*** a > 0:**

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

* $a < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{-\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ khi biết các tính chất của đồ thị và của hàm số.

1. Phương pháp

Từ các giả thiết của bài toán, ta thiết lập một hệ phương trình với các ẩn là a, b, c biểu thị các tính chất của đồ thị hoặc của hàm số. Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (P). Tính a, b, c biết rằng:

a) Đồ thị (P) đi qua ba điểm A(1; 0), B(–3; –4) và C(0; –4).

b) Đồ thị (P) có đỉnh S(2; –1), cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Giải

a) Ta có (P) qua A, B, C nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a.1 + b.1 + c = 0 \\ a(-3)^2 + b(-3) + c = -4 \\ a.0 + b.0 + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a - 3b + c = -4 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}.$$

b) Ta có: – (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 $\Rightarrow c = 3$.

– (P) có đỉnh S(2; –1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ S \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a - 8a + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy $a = 1$; $b = -4$ và $c = 3$.

Ví dụ 2: Tìm phương trình của parabol (P) biết (P) qua hai điểm A(–2; 5), B(3; 10) và (P) nhận đường thẳng (Δ): $x = 1$ làm trục đối xứng.

Giải

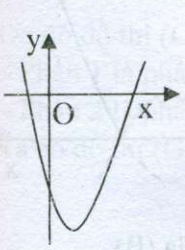
Gọi (P): $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

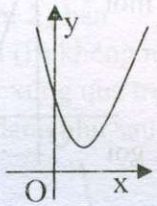
Theo giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 4a - 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 10 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 10 \quad (1) \\ b = -2a \end{cases}$

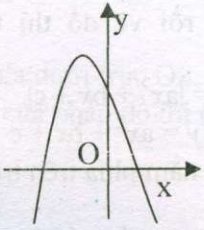
Giải hệ (1) ta được $a = -1$; $b = 2$ và $c = 13$. Vậy (P): $y = -x^2 + 2x + 13$.

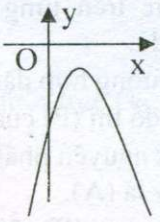
3. Bài tập

Bài 1. Trong các đồ thị của các hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ dưới đây, hãy cho biết dấu của các hệ số a, b, c.









Bài 2. Cho hàm số bậc hai $y = a(x - m)^2$ có đồ thị (P). Tính a và m trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) qua hai điểm A(2; 0) và B(4; 12).

b) (P) đi qua A(1; 8) và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$ có đồ thị (P). Tính b và c trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) qua hai điểm A(–1; 4) và B(2; –2).

b) Hàm số đạt GTNN bằng –1 khi $x = 2$.

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^2 - 4x + c$ có đồ thị (P). Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau:

a) Hàm số có GTNN bằng 3 khi $x = 1$.

b) Đồ thị cắt trục tung tại tại điểm có tung độ 7 và có GTNN bằng 3.

Bài 5. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (P). Tính a, b, c trong mỗi trường hợp sau:

a) Hàm số f là hàm số chẵn, đồ thị (P) đi qua hai điểm A(–1; 1), B(2; –5).

b) Đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ và có đỉnh S(1; –2).

c) Đồ thị (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ –2 và hàm số đạt GTLN bằng 0 khi $x = 2$.

d) Đường thẳng $y = 3$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là –1 và 3, và hàm số đạt GTNN bằng –1.

Vấn đề 2: Vẽ đồ thị của hàm số bậc hai và của hàm số bậc hai chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

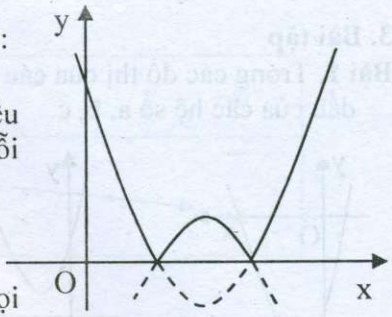
Ta thực hiện như sau:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tìm tọa độ đỉnh S:

$$x_S = -\frac{b}{2a};\ y_S = -\frac{\Delta}{4a}$$ (hay thay x_S vào phương trình (P) để tìm y_S)

- Xác định dấu của a và lập bảng biến thiên của hàm số.
- Lấy các điểm đặc biệt.
- Vẽ parabol.

b) Để vẽ đồ thị có chứa dấu trị tuyệt đối ta thực hiện:



▸ Trường hợp tổng quát:

Ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối, viết hàm số bằng nhiều biểu thức trên từng khoảng rồi vẽ đồ thị trong mỗi khoảng đó.

▸ Trường hợp đặc biệt: $y = |ax^2 + bx + c|$

– Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$

– Giữ nguyên phần của (P) nằm phía trên trục Ox, gọi phần này là (A).

– Phần của (P) nằm dưới Ox thì lấy đối xứng qua Ox, gọi phần này là (B).

Khi đó: Đồ thị của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ là hợp của hai phần (A) và (B).

2. Các ví dụ

Ví dụ 1:

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

b) Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = g(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Giải

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

– Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Tọa độ đỉnh: S(1; –4).

– Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

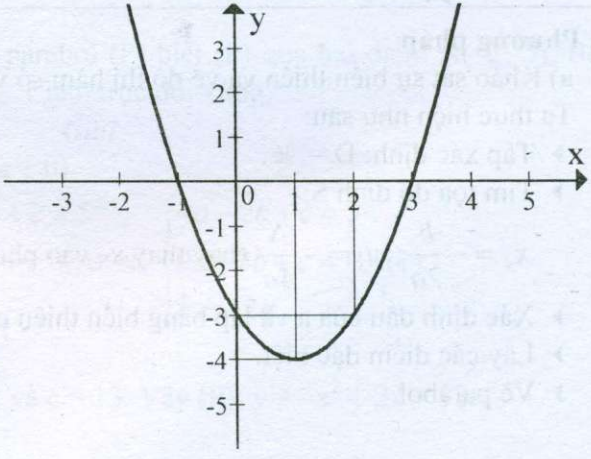
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	–4	↗	$+\infty$

– Trục đối xứng: $x = 1$.

– Bảng giá trị đặc biệt:

x	–1	0	1	2	3
y	0	–3	–4	–3	0

– Đồ thị:



Đồ thị hàm số là một parabol (P) quay bề lõm lên trên.

b) Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = g(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

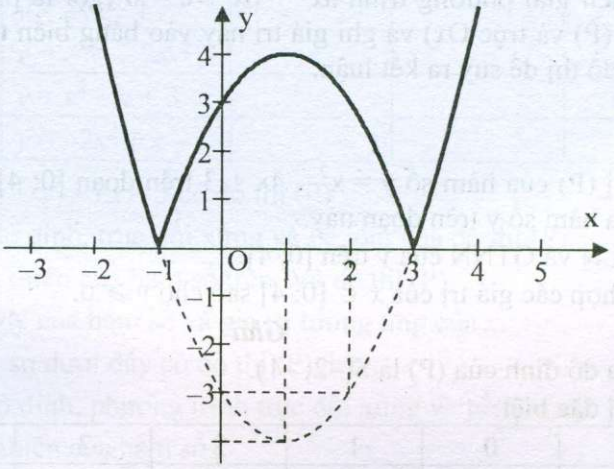
Ta có: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị (G) gồm 2 phần:

– Phần 1 là phần của (P) không nằm phía dưới trục Ox.

– Phần 2 là phần đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (P) nằm dưới trục Ox.

Ta có đồ thị (G) có dạng như sau:



3. Bài tập

Bài 1. Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị (P) của mỗi hàm số bậc hai trong bảng dưới đây:

Hàm số	Tọa độ đỉnh	Phương trình trục đối xứng	Bề lõm	Tọa độ giao điểm của (P) và Oy	Tọa độ giao điểm của (P) và Ox
$y = -x^2 + 4$					
$y = x^2 - 4x + 5$					
$y = -2x^2 + 4x$					
$y = x^2 + 2x - 8$					

Bài 2. Vẽ đồ thị (G) và lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau đây:

a) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & (x \geq 1) \\ x + 1 & (x < 1) \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$

Bài 3. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau đây:

a) $y = |x - 2|(x + 2)$ b) $y = -x^2 + 2|x| + 3$

Vấn đề 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên một khoảng. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên một đoạn. Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y > 0$ (hoặc $y < 0$)

1. Phương pháp

- Ta có thể dùng đồ thị hoặc lập bảng biến thiên của hàm số để kết luận về sự biến thiên hoặc xác định GTLN, GTNN của hàm số trong khoảng, đoạn tương ứng.

- Khi tìm giá trị x sao cho $y > 0$ hoặc $y < 0$, ta cần tính hoành độ giao điểm của (P) và Ox bằng cách giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox) và ghi giá trị này vào bảng biến thiên hay xác định các điểm này trên đồ thị để suy ra kết luận.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$, từ đó suy ra sự biến thiên của hàm số y trên đoạn này.

b) Tìm GTLN và GTNN của y trên $[0; 4]$.

c) Tìm tập hợp các giá trị của $x \in [0; 4]$ sao cho $y \geqslant 0$.

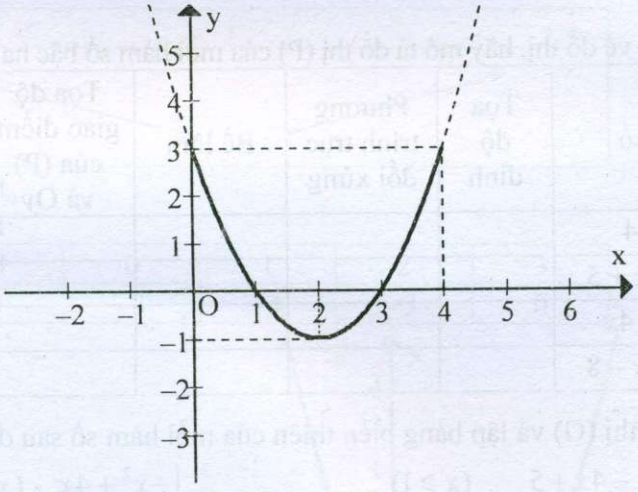
Giải

a) Ta có tọa độ đỉnh của (P) là S(–2; –1).

Bảng giá trị đặc biệt:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	–1	0	3

Đồ thị:



Đồ thị hàm số là một parabol (P) quay bề lõm lên trên.

Dựa vào đồ thị (P) ta có sự biến thiên của hàm số trên $[0; 4]$ như sau:

– Với $x \in (0; 2)$ đồ thị đi xuống nên hàm số nghịch biến trong $(0; 2)$.

– Với $x \in (2; 4)$ đồ thị đi lên nên hàm số đồng biến trong $(2; 4)$.

b) Dựa vào đồ thị (P) của hàm số ta thấy:

– Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng 3 đạt tại $x = 0$ hay $x = 4$.

– Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [0; 4] bằng –1 đạt tại x = 2.

c) Dựa vào đồ thị ta có:

Tập hợp các giá trị của $x \in [0; 4]$ sao cho $y \geq 0$ là $T = [0; 1] \cup [3; 4]$.

3. Bài tập

Bài 1. Hãy đánh dấu X vào ô thích hợp:

Trong khoảng	Hàm số	Đồng biến	Nghịch biến	Không có kết luận
$(-1; 0)$	$y = 2x^2 + 1$			
$(-3; -2)$	$y = -x^2 - 2x + 3$			
$(1; 2)$	$y = x^2 - x + 3$			
$(-1; 1)$	$y = -2x^2 + x - 1$			

Bài 2. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị (P)

a) Xác định tọa độ đỉnh, trục đối xứng và bề lõm của đồ thị (P).

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên. Vẽ đồ thị (P).

c) Xác định GTNN của hàm số và giá trị tương ứng của x.

Bài 3. Với mỗi hàm số dưới đây có đồ thị (P), hãy:

– Xác định tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và bề lõm của (P).

– Lập bảng biến thiên của hàm số.

– Tìm tọa độ giao điểm của (P) và trục tung, trục hoành, nếu có.

– Vẽ đồ thị (P).

– Dùng đồ thị để xác định tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

a) $y = -x^2 + 1$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c) $y = -(x + 2)^2 + 4$.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng (0; 1)

c) Xác định giá trị của x sao cho $y \leq 0$

d) Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn [0; 3]

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

Bài 1. Định m để 3 đường thẳng sau đây đồng quy:

a) (d_1): $y = -2x + 2$ (d_2): $y = -4x$ (d_3): $y = (m - 1)x + 2m + 1$.

b) (d_1): $y = -2(x + 1)$ (d_2): $y = 3mx - m^2 + \frac{2}{3}$ (d_3): $y = x - m$.

Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng (d), biết rằng (d) cắt đường thẳng (D_1): $y = -2x + 3$ tại điểm có hoành độ bằng 3 và cắt đường thẳng (D_2): $y = 4x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

Bài 3.

a) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm I(2; 3), cắt trục Ox và Oy tại các điểm có tọa độ dương và (d) tạo với hai trục này thành một tam giác vuông cân.

b) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua I(2; 2), cắt Ox và Oy tại các điểm có tọa độ dương và (d) tạo với hai trục này thành một tam giác có diện tích bằng 9 đơn vị diện tích.

Bài 4. Gọi A, B là hai điểm thuộc đồ thị (d) của hàm số $y = f(x) = mx + 2m - 4$ có hoành độ lần lượt là –1 và 2.

a) Xác định tọa độ của A và B.

b) Định m để cả hai điểm A và B cùng nằm phía trên trục hoành.

c) Suy ra điều kiện của m để $f(x) > 0$ $\forall x \in [-1; 2]$.

Bài 5. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (P). Hãy xác định các hệ số a, b, c trong các trường hợp sau:

a) Đồ thị (P) đi qua ba điểm: A(–1; 8), B(1; 0), C(4; 3)

b) (P) có đỉnh S(–2; –2) và qua điểm M(–4; 6).

c) (P) đi qua A(4; –6), cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ là 1 và 3.

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^2 + c$ có đồ thị (P). Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau:

a) Đỉnh của (P) là S(0; 3) và một trong hai giao điểm của (P) với Ox là A(–2; 0).

b) (P) đi qua hai điểm A(1; 1) và B(2;–2).

Bài 7. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (P). Tính a, b, c trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có đỉnh là S(1; 0) và cắt đường thẳng $y = 4$ tại hai điểm có hoành độ bằng –1 và 3.

b) (P) qua điểm A(–2; 3), cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 3.

Bài 8.

Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị (P) của hàm số đi qua điểm A(–2; 3).

b) (P) cắt trục Ox tại hai điểm, trong đó một điểm có hoành độ là 2.

c) (P) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (x < 1) \\ x^2 - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị (C) và lập bảng biến thiên của hàm số nói trên.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y = \frac{3}{4}$.

c) Dùng đồ thị (C) và đường thẳng (D): $y = m$ để biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

Bài 10. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y \leq 0$

c) Xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(-3; 0)$

d) Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$.

Bài 11. Cho hàm số $y = mx^2 - (m + 1)x - 2m - 9$ có đồ thị (P_m)

a) Tìm giá trị của m sao cho đồ thị (P_m) đi qua điểm $A(-2; 1)$.

b) Tìm tọa độ các điểm sao cho (P_m) đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Bài 12. Cho parabol (P): $y = x^2 + 2x$ và đường thẳng (d): $y = -2x + m$.

a) Xác định giá trị của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ trung điểm I của AB. Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b) Xác định m sao cho (d) và (P) có điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

Bài 13. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2$ có đồ thị (P_0). Hãy xác định các phép tịnh tiến song song với trục tọa độ biến đổi (P_0) thành đồ thị của mỗi hàm số sau đây:

a) $y = g(x) = 2(x + 1)^2$

b) $y = h(x) = 2(x - 2)^2$

c) $y = k(x) = 2(x + 2)^2 - 3$

d) $y = s(x) = 2(x - 3)^2 + 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 2
HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

Vấn đề 1: **Tìm tập xác định của hàm số y = f(x). Vị trí của một điểm đối với đồ thị**

Bài 1.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ |x| - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; +\infty) \setminus \{-1; 1\}$.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \geqslant 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 6 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 6] \setminus \{-2; 2\}$.

e) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -4 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; +\infty) \setminus \{1\}$.

f) Hàm số xác định $\Leftrightarrow |x + 1| + |x - 1| \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

g) Hàm số xác định $\Leftrightarrow |x - 2| - |x + 2| \neq 0 \Leftrightarrow |x - 2| \neq |x + 2| \Leftrightarrow x \neq 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

h) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 9 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ -3 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1; 3]$.

Bài 2.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Do đó: Hàm số xác định trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow (1; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 1$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ x - 2m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq 2m + 2 \end{cases}$ (1).

Ta có:

▸ $m \geq 2m + 2 \Leftrightarrow m \leq -2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x \geq m$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Do đó: Hàm số có tập xác định là $[0; +\infty) \Leftrightarrow [0; +\infty) = [m; +\infty) \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

▸ $m < 2m + 2 \Leftrightarrow m > -2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x \geq 2m + 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [2m + 2; +\infty)$.

Do đó: Hàm số có tập xác định là $[0; +\infty)$

$\Leftrightarrow [0; +\infty) = [2m + 2; +\infty) \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (nhận)

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = -1$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} m - x \geq 0 \\ 2x - 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq m \\ x \geq 2m \end{cases}$ (1).

Ta có:

▸ $m \geq 2m \Leftrightarrow m \leq 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2m \leq x \leq m$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [2m; m]$.

Do đó: Hàm số xác định $\forall x \in (-4; -3) \Leftrightarrow (-4; -3) \subset [2m; m]$

$\Leftrightarrow 2m \leq -4 < -3 \leq m \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -2$.

▸ $m < 2m \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \varnothing$. Do đó $m > 0$ (loại)

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 \leq m \leq -2$.

Bài 3.

a) Ta có: * $\forall x \leq 1$ thì $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$ xác định.

* $\forall x \in (1; 5]$ thì $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ xác định.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 5]$.

▸ $f(-2) = -2 + 2\sqrt{1-(-3)} = 1$; $f(1) = 1 + 2\sqrt{1-1} = 1$;

$f(2) = \dfrac{2+3}{2+1} = \dfrac{5}{3}$; $f(5) = \dfrac{5+3}{5+1} = \dfrac{4}{3}$.

b) * Ta có $x_M = -1 \leq 1$ nên:

$M \in (C) \Leftrightarrow x_M + 2\sqrt{1-x_M} = y_M \Leftrightarrow -1 + 2\sqrt{1-(-1)} = 2\sqrt{2} - 1$ (đúng).

Vậy $M \in (C)$.

* $x_N = 1$ nên $N \in (C) \Leftrightarrow x_N + 2\sqrt{1-x_N} = y_N \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{1-1} = 2$ (sai).

Vậy $N \notin (C)$.

* $x_P = 3 > 1$ nên $P \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{x_P + 3}{x_P + 1} = y_P \Leftrightarrow \dfrac{3+3}{3+1} = 1$ (sai).

Vậy $P \notin (C)$.

Bài 4.

TH1: $x_M \le 1$, ta có:

$M \in (G) \Leftrightarrow x_M^2 - x_M + 1 = y_M$

$\Leftrightarrow x_M^2 - x_M + 1 = 3 \Leftrightarrow x_M = -1$ hay $x_M = 2$ (loại). Vậy M(–1; 3).

TH2: $x_M > 1$, ta có:

$$M \in (G) \Leftrightarrow \frac{x_M^2 - 12}{x_M + 2} = y_M \Leftrightarrow \frac{x_M^2 - 12}{x_M + 2} = 3$$

$\Leftrightarrow x_M^2 - 3x_M - 18 = 0 \Leftrightarrow x_M = 6$ hay $x_M = -3$ (loại). Vậy M(6; 3).

Tóm lại: Trên (G) có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là M(–1; 3) và M(6; 3).

***Vấn đề 2:* Khảo sát sự biến thiên của hàm số y = f(x)**

Bài 1.

a) Ta có: $\forall x_1, x_2$ và $x_1 \ne x_2$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 + 2x_2 - 5) - (x_1^2 + 2x_1 - 5)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2^2 - x_1^2) + 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 + 2.$$

Do đó:

- $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$ thì $x_1 + x_2 + 2 < 0$ nên $H < 0$
  $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 + 2 > 0$ nên $H > 0$
  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

b) Ta có: $\forall x_1, x_2$ và $x_1 \ne x_2$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-2x_2^2 + 4x_2 + 1) - (-2x_1^2 + 4x_1 + 1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-2(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -2(x_1 + x_2 - 2).$$

Do đó:

- $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ thì $x_1 + x_2 - 2 < 0$ nên $H > 0$
  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 - 2 > 0$ nên $H < 0$
  $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

c) Ta có: $\forall x_1, x_2 \ne 1$ và $x_1 \ne x_2$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{1 - x_2} - \frac{1}{1 - x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1 - x_1 - 1 + x_2}{(x_2 - x_1)(1 - x_1)(1 - x_2)} = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)}.$$

Do đó:

- $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ thì $(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$ nên $H > 0$

  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.
- $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ thì $(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$ nên $H > 0$

  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{1}{1-x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

d) Ta có: $\forall\ x_1, x_2 > 4$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt{x_2 - 4} + \sqrt{x_2 + 1}) - (\sqrt{x_1 - 4} + \sqrt{x_1 + 1})}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_2 - 4} - \sqrt{x_1 - 4}) + (\sqrt{x_2 + 1} - \sqrt{x_1 + 1})}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2 - 4} + \sqrt{x_1 - 4}} + \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2 + 1} + \sqrt{x_1 + 1}}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_2 - 4} + \sqrt{x_1 - 4}} + \frac{1}{\sqrt{x_2 + 1} + \sqrt{x_1 + 1}} > 0$$

Do đó: Hàm số đồng biến trên $(4; +\infty)$.

Chú ý: Ta có thể xét như sau:

Với mọi $x_1, x_2 \in (4; +\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có:

$$\sqrt{x_1 - 4} < \sqrt{x_2 - 4} \text{ và } \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1 - 4} + \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 - 4} + \sqrt{x_2 + 1}$$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ Hàm số f đồng biến trên $(4; +\infty)$.

e) ▸ Với $x_1, x_2 > 2$ và $x_1 < x_2$ ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = |2x_2 - 4| + x_2 - (|2x_1 - 4| + x_1)$$
$$= 2x_2 - 4 + x_2 - (2x_1 - 4 + x_1)$$
$$= 3(x_2 - x_1) > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

▸ Với $x_1, x_2 < 2$ và $x_1 < x_2$ ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = |2x_2 - 4| + x_2 - (|2x_1 - 4| + x_1)$$
$$= -2x_2 + 4 + x_2 - (-2x_1 + 4 + x_1)$$
$$= -(x_2 - x_1) < 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

Bài 2.

a) Ta có: $y = x - \dfrac{1}{x-1}$.

Ta có: $\forall x_1, x_2 \neq 1$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$H = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2 - \frac{1}{x_2-1} - \left(x_1 - \frac{1}{x_1-1}\right)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{x_2 - x_2 - \frac{x_1-1-x_2+1}{(1-x_1)(1-x_2)}}{x_2-x_1} = 1 + \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

Do đó:

- $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ thì $(1-x_1)(1-x_2) > 0$ nên $H > 0$

  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.
- $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ thì $(1-x_1)(1-x_2) > 0$ nên $H > 0$

  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

b) ▸ Với $x_1, x_2 > 1$ và $x_1 < x_2$ ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = |x_2 - 1| + 2x_2 - (|x_1 - 1| + 2x_1)$$
$$= x_2 - 1 + 2x_2 - (x_1 - 1 + 2x_1)$$
$$= 3(x_2 - x_1) > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

▸ Với $x_1, x_2 < 1$ và $x_1 < x_2$ ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = |x_2 - 1| + 2x_2 - (|x_1 - 1| + 2x_1)$$
$$= -x_2 + 1 + 2x_2 - (-x_1 + 1 + 2x_1)$$
$$= x_2 - x_1 > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vấn đề 3: Xét tính chẵn lẻ của hàm số f(x)

Bài 1.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x-1)(-x+1)} = \frac{-x}{(x+1)(x-1)} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = \sqrt{1-2(-x)} - \sqrt{1+2(-x)} = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$

Tập xác định: D = $[-1;1] \setminus \{0\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định: D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = \dfrac{|-x-1|-|-x+1|}{|-x+2|-|-x-2|} = \dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x+2|-|x-2|} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

e) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2} \neq \sqrt{x^2+2x+2} \Leftrightarrow x \neq 0$.

Tập xác định: D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+2x+2}} = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

f) Ta có $y = |x+4| - \sqrt{x^2-8x+16} = |x+4| - |x-4|$.

Tập xác định: D = $\mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = |-x+4| - |-x-4| = |x-4| - |x+4| = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Vấn đề 4: Phép tịnh tiến đồ thị

Bài 1.

a) Tập xác định: D = [–2; 2].

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Ta có $\forall x_1, x_2 \in (-2; 2)$ và $x_1 < x_2$ thì:

$\sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+x_2}$ và $\sqrt{2-x_1} > \sqrt{2-x_2}$

$\Rightarrow \sqrt{2+x_1} - \sqrt{2-x_1} < \sqrt{2+x_2} - \sqrt{2-x_2}$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên (–2; 2).

c) Tịnh tiến (G) sang phải 1 đơn vị được đồ thị (G_1), rồi tiếp tục tịnh tiến (G_1) lên trên 2 đơn vị được (G_2) là đồ thị của hàm số:

$$g(x) = f(x-1) + 2 = \sqrt{2+(x-1)} - \sqrt{2-(x-1)} + 2 = \sqrt{1+x} - \sqrt{3-x} + 2.$$

Bài 2. Tịnh tiến đồ thị (G) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị (G') là đồ thị của một hàm số $g(x) = f(x+2) = (x+2)^2 - 4(x+2) + 3 = x^2 - 1$.

Ta thấy hàm số g(x) có:

Tập xác định là $D_g = \mathbb{R}$;

$\forall x \in D_g$ thì $-x \in D_g$ và:

$g(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = g(x)$. Vậy g(x) là hàm số chẵn.

Bài 3.

a) Tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị của hàm số:

$$g(x) = f(x-2) = \frac{-3}{(x-2)+1} = \frac{-3}{x-1}.$$

b) Tịnh tiến (G) lên trên 4 đơn vị ta được đồ thị của hàm số:

$$h(x) = f(x) + 4 = \frac{-3}{x+1} + 4 = \frac{4x+1}{x+1}.$$

c) Tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị (G_1), tiếp tục tịnh tiến (G_1) lên trên 4 đơn vị ta được đồ thị (G_2) là đồ thị của hàm số:

$$k(x) = f(x-2) + 4 = \frac{-3}{(x-2)+1} + 4 = \frac{4x-7}{x-1}.$$

Bài 4. Ta có $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x-2}$

Khi tịnh tiến (G) sang trái hay sang phải m đơn vị thì được đồ thị của hàm số:

$$g(x) = f(x+m) = x + m - 2 + \frac{2}{x+m-2}.$$

Để g(x) là hàm số lẻ thì G_g phải là tập đối xứng $\Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$.

Khi đó $g(x) = x + \frac{2}{x}$ là một hàm số lẻ.

Vậy ta có thể tìm được số $p = 2 > 0$ để khi tịnh tiến (G) sang trái hay sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số g(x) là một hàm số lẻ.

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Vấn đề 1: **Lập phương trình đường thẳng**

Bài 1.

a) Ta có (d): $y = ax + b$.

(d) qua A và qua B nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 3 = a.(-1) + b \\ -2 = a.4 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy (d): $y = -x + 2$.

b) Ta có (D): $y = ax + b$.

(D)// (D') $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b \neq -2 \end{cases}$. Do đó (D): $y = 3x + b$ ($b \neq -2$).

Lại có (D) qua M $\Leftrightarrow 5 = 3.3 + b \Leftrightarrow b = -4$ (nhận).

Vậy (D): $y = 3x - 4$.

c) Ta có (Δ): $y = ax + b$.

(Δ) vuông góc với (Δ') $\Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow a = -4$.

Do đó (Δ): $y = -4x + b$.

Lại có (Δ) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 $\Leftrightarrow$ B(0; 3) $\in$ (Δ) $\Leftrightarrow b = 3$.

Vậy (Δ): $y = -4x + 3$.

Bài 2.

a) Tọa độ A thỏa đồng thời phương trình của (d_1) và (d_2) nên ta có:

$\begin{cases} y = -3x + 6 & (1) \\ y = 2x + 1 & (2) \end{cases}$

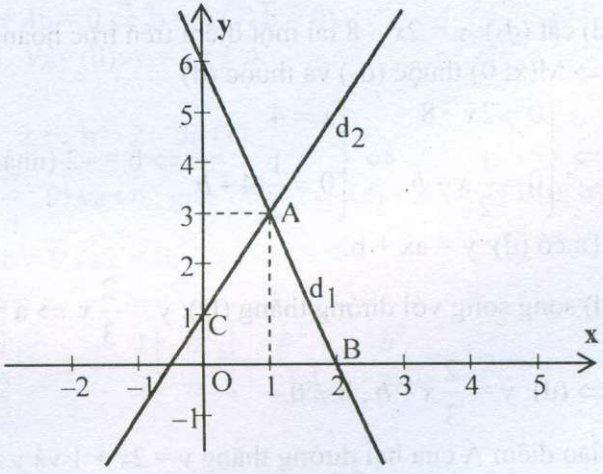
Lấy (1) – (2) ta được $0 = -5x + 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (1) ta được $y = -3.1 + 6 = 3$. Vậy A(1; 3).

b) (d_1) qua hai điểm A(1; 3) và B(2; 0).

(d_2) qua hai điểm A(1; 3) và C(–1; –1).

Ta có đồ thị có dạng sau:



Dựa vào đồ thị ta thấy d_1 cắt d_2 tại A(1; 3) đúng với kết quả đã tìm bằng phép tính trên.

Bài 3.

a) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) cắt đường thẳng (d_2): $y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 3

$\Rightarrow$ Điểm $A(x_A; 3)$ thuộc (d_2) và thuộc (d)

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2.0 - 1 \\ y = a.0 + b \end{cases} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow$ (d): $y = ax - 1$.

Lại có: (d) cắt đường thẳng (d_1): $y = \frac{3}{2}x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 4

$\Rightarrow$ B(4; y) thuộc (d_1) và thuộc (d)

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}.4 - 5 \\ y = a.4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy (d): $y = \frac{1}{2}x - 1$.

b) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) đi qua điểm A(1; 5) $\Leftrightarrow 5 = a + b$ (1)

* (d) cắt đường thẳng (D): $y = -x + 3$ tại một điểm trên trục tung.

$\Rightarrow$ M(0; y) thuộc (D) và thuộc (d)

$\Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = b \end{cases} \Rightarrow b = 3$. Thay vào (1) ta được $a = 2$.

Vậy (d): $y = 2x + 3$.

Bài 4.

a) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) song song với (d_1): $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ và $b \neq 0$.

* (d) cắt (d_2): $y = 2x - 8$ tại một điểm trên trục hoành.

$\Rightarrow$ M(x; 0) thuộc (d_2) và thuộc (d)

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2x - 8 \\ 0 = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 0 = \frac{1}{2}.4 + b \end{cases} \Rightarrow b = -2 \text{ (nhận). Vậy (d): } y = \frac{1}{2}x - 2.$$

b) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) song song với đường thẳng (D): $y = \frac{2}{3}x \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ và $b \neq 0$.

$\Rightarrow$ (d): $y = \frac{2}{3}x + b$, $b \neq 0$.

* Giao điểm A của hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 3x - 2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 & (1) \\ y = 3x - 2 & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) – (2) ta được $0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3$. Thay vào (1) ta được $y = 7$.

Vậy A(3; 7).

Theo giả thiết ta có A $\in$ (d) $\Rightarrow 7 = \frac{2}{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 5$. Vậy (d): $y = \frac{2}{3}x + 5$.

Bài 5.

a) Gọi $A = (d) \cap Ox \Rightarrow A(x_A; 0)$.

$B = (d) \cap Oy \Rightarrow B(0; y_B)$.

Ta có I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_B = -2 \end{cases}$.

Vậy A(4; 0) và B(0; –2).

b) Ta có (d): $y = ax + b$.

(d) qua A và B nên ta có: $\begin{cases} 0 = 4a + b \\ -2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$. Vậy (d): $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Bài 6.

a) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) qua I(1; 3) $\Leftrightarrow a + b = 3 \Leftrightarrow a = 3 - b$ (1)

* Giao điểm của (d) là $A(-\frac{b}{a}; 0)$ và Ox; giao điểm của (d) với Oy là B(0; b).

Ta có $x_A > 0$ và $y_B > 0$.

Vì tam giác OAB vuông cân nên $x_A = y_B \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = b \Leftrightarrow ab + b = 0$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được:

$b(3 - b) + b = 0 \Leftrightarrow -b^2 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = 4$ (vì $b > 0$).

Thay vào (1) ta được $a = -1$. Vậy (d): $y = -x + 4$.

b) Ta có (d): $y = ax + b$.

* (d) qua I(3; 2) $\Leftrightarrow 3a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 3a$ (1)

* Giao điểm của (d) là $A(-\frac{b}{a}; 0)$ và Ox; giao điểm của (d) với Oy là B(0; b).

Ta có $x_A > 0$ và $y_B > 0$ nên $b > 0$ và $a < 0$.

Ta có: $OA = |x_A|$ và $OB = |y_B|$

Do đó $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|x_A.y_B| = \frac{1}{2}\left|-\frac{b}{a}.b\right| = \frac{b^2}{2|a|} = -\frac{b^2}{2a}$.

Theo giả thiết ta có:

$S_{OAB} = 16 \Leftrightarrow b^2 = -32a$ (2) (do $y_B = b > 0$ và $x_A = -\frac{b}{a} > 0$ nên $a < 0$)

Thay (1) vào (2) ta được:

$(2 - 3a)^2 = -32a \Leftrightarrow 9a^2 + 20a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ hoặc $a = -\frac{2}{9}$.

Với a = –2 thì b = 2 – 3(–2) = 8 (nhận) ⇒ (d): y = –2x + 8.

Với $a = -\frac{2}{9}$ thì $b = 2 - 3(-\frac{2}{9}) = \frac{8}{3}$ (loại). Vậy (d): y = –2x + 8.

Bài 7. Ta có $(d_1) \cap (d_3) = A \Leftrightarrow$ Tọa độ A thỏa hệ $\begin{cases} y = 2x - 1 & (1) \\ y = 3x - m & (2) \end{cases}$.

(2) – (1) ta được x – m + 1 = 0 ⇔ x = m – 1.

Thay vào (1) ta được y = 2(m – 1) – 1 = 2m – 3. Vậy A(m – 1; 2m – 3).

Do đó (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy

$\Rightarrow A \in (d_2) \Rightarrow 2m - 3 = m(m-1) - m$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Với m = 1 thì d_2: y = x – 1; d_3: y = 3x – 1. Ta thấy d_1; d_2, d_3 phân biệt nên m = 1 thỏa yêu cầu bài toán.

Với m = 3 thì d_2: 3x – 3 và d_3: y = 3x – 3. Ta thấy d_2 và d_3 trùng nhau nên m = 3 không thỏa yêu cầu bài toán. Vậy m thỏa yêu cầu bài toán ⇔ m = 1.

Bài 8.

Ta có (d) qua A(x; y) với mọi m ⇔ y = mx – 2 – 4m với mọi m

⇔ (x – 4)m – 2 – y = 0, ∀ m ∈ ℝ

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ -2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy (d) luôn đi qua A(4; –2) với mọi m.

Vấn đề 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên từng khoảng

Bài 1.

* Tập xác định: D = R.

* Chiều biến thiên:

– Với x ∈ (–∞; 0) thì f(x) = x + 3 có a = 1 > 0 nên f đồng biến trong khoảng (–∞; 0).

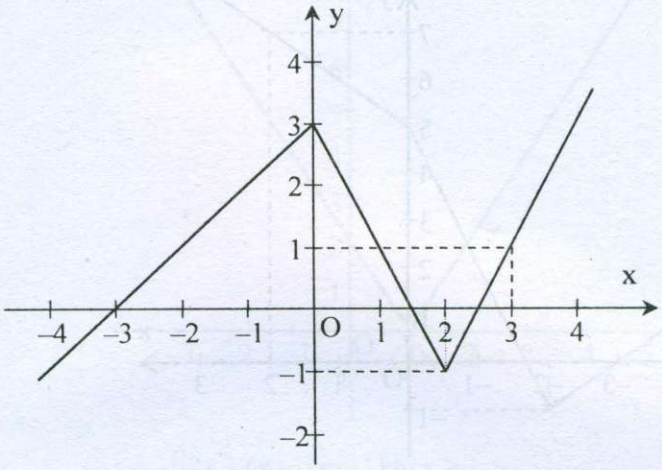
– Với x ∈ (0; 2) thì f(x) = 3 – 2x có a = –2 < 0 nên f nghịch biến trong khoảng (0; 2).

– Với x ∈ (2; +∞) thì y = 2x – 5 có a = 2 > 0 nên f đồng biến trong khoảng (2; +∞).

Ta có bảng biến thiên sau:

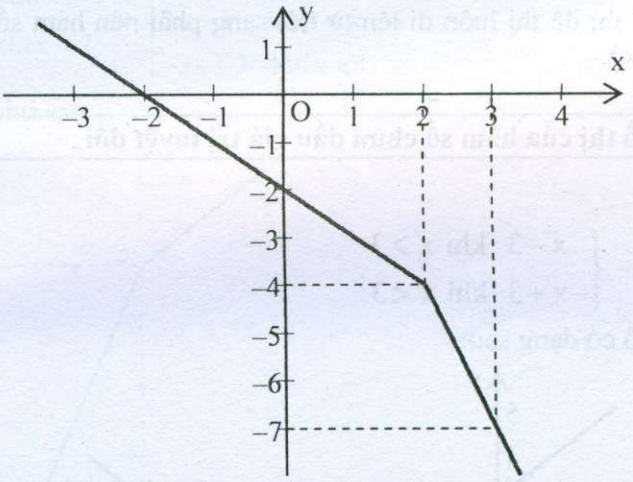
x	–∞		0		2		+∞
f(x)		↗	3	↘	–1	↗	

* Đồ thị:



Bài 2. a) * Ta có: $y=\begin{cases}x-2-2x & \text{khi } x\geqslant 2\\ -x+2-2x & \text{khi } x<2\end{cases}=\begin{cases}-x-2 & \text{khi } x\geqslant 2\\ -3x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

* Đồ thị:



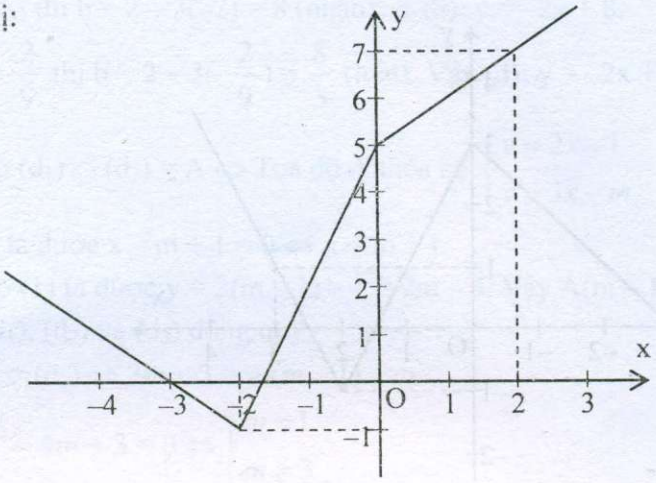
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị luôn đi xuống từ trái sang phải nên hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $y=2|x+2|-|x|+1$.

* Ta có: $y=\begin{cases}2(-x-2)-(-x)+1 & \text{khi } x<-2\\ 2(x+2)-(-x)+1 & \text{khi } -2\leqslant x<0\\ 2(x+2)-x+1 & \text{khi } x\geqslant 0\end{cases}$

$=\begin{cases}-x-3 & \text{khi } x<-2\\ 3x+5 & \text{khi } -2\leqslant x<0\\ x+5 & \text{khi } x\geqslant 0\end{cases}$.

* Đồ thị:



Dựa vào đồ thị ta thấy:

– Với $x < -2$ thì đồ thị luôn đi xuống từ trái sang phải nên hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

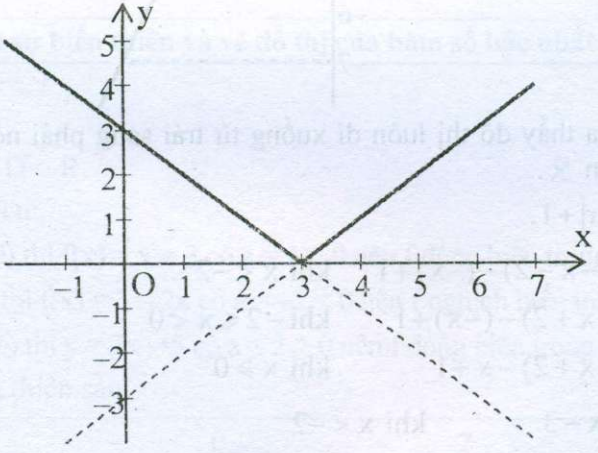
– Với $x > -2$ thì đồ thị luôn đi lên từ trái sang phải nên hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

***Vấn đề 3:* Vẽ đồ thị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối**

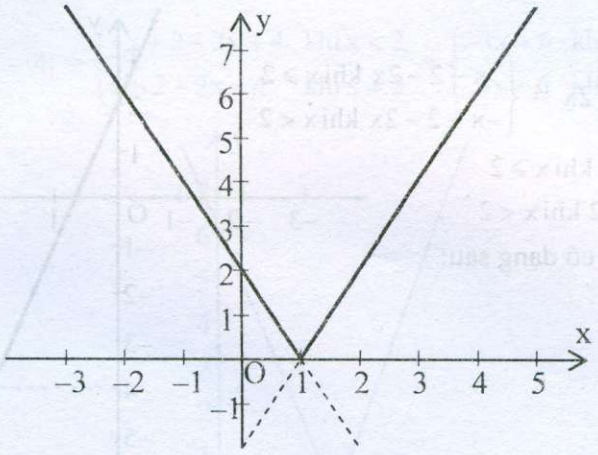
Bài 1.

a) $y = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{khi } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có dạng sau:



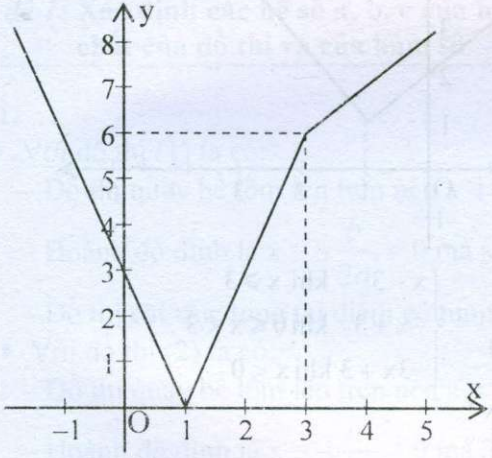
b) $y = |2 - 2x| = \begin{cases} 2 - 2x & \text{khi } x < 1 \\ -2 + 2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.



c) $y = |2x - |x-3|| = \begin{cases} |2x-(x-3)| & \text{khi } x \geq 3 \\ |2x+(x-3)| & \text{khi } x < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} |x+3| & \text{khi } x \geq 3 \\ |3x-3| & \text{khi } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{khi } x \geq 3 \\ 3x-3 & \text{khi } 1 \leq x < 3 \\ -3x+3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

Đồ thị hàm số như sau:

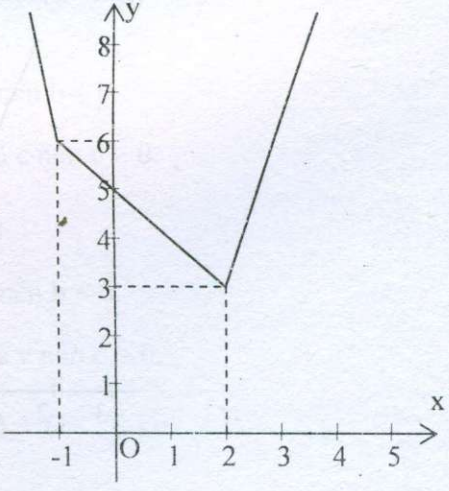


d) $y = |x+1| + |2x-4|$

$= \begin{cases} -x-1-2x+4 & \text{khi } x < -1 \\ x+1-2x+4 & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ x+1+2x-4 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} -3x+3 & \text{khi } x < -1 \\ -x+5 & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ 3x-3 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$

Đồ thị của hàm số như sau:

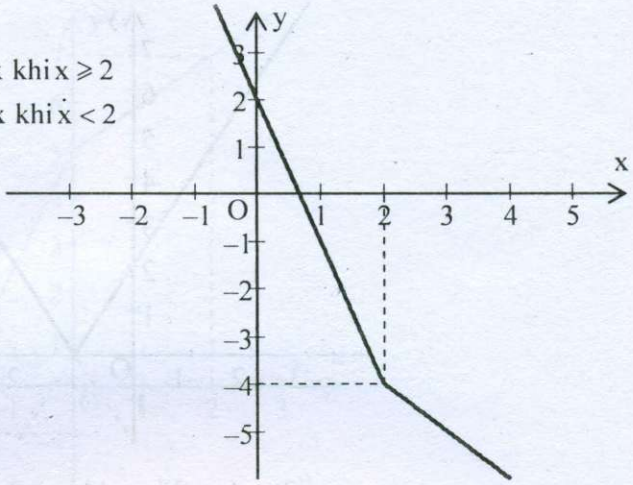


Bài 2. Vẽ

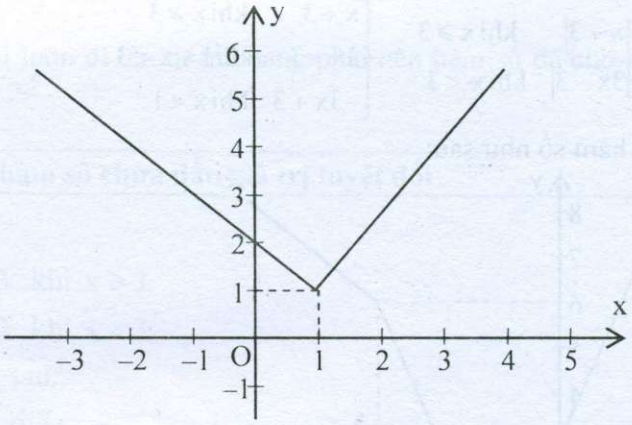
a) $y = |x - 2| - 2x = \begin{cases} x - 2 - 2x \text{ khi } x \geqslant 2 \\ -x + 2 - 2x \text{ khi } x < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2 \text{ khi } x \geqslant 2 \\ -3x + 2 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

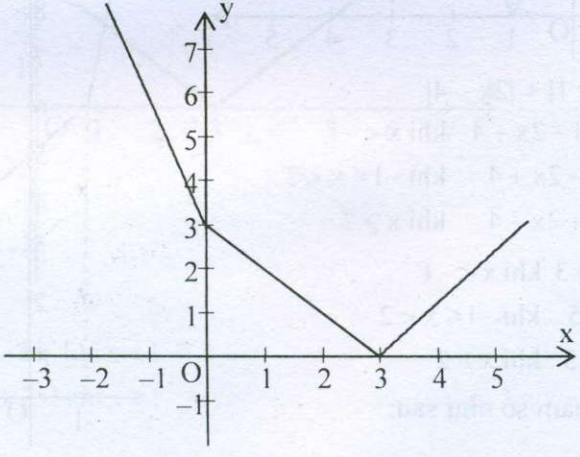
Đồ thị hàm số có dạng sau:



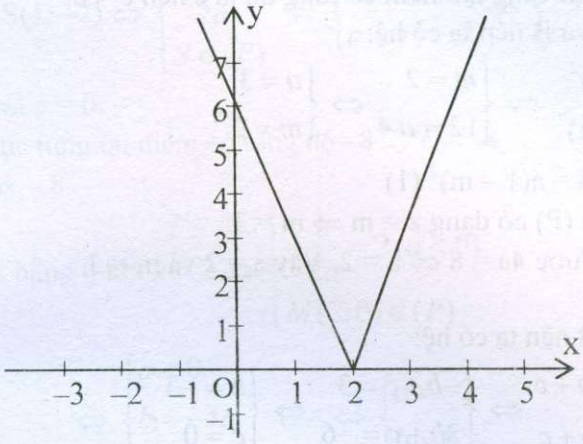
b) $y = |2 - 2x| + x = \begin{cases} 2 - 2x + x \text{ khi } x \leqslant 1 \\ 2x - 2 + x \text{ khi } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x \text{ khi } x \leqslant 1 \\ 3x - 2 \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.



c) $y = |2x - |x| - 3| = \begin{cases} |x - 3| \text{ khi } x \geqslant 0 \\ |3x - 3| \text{ khi } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 \text{ khi } x \geqslant 3 \\ -x + 3 \text{ khi } 0 \leqslant x < 3 \\ -3x + 3 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$



d) $y = |x-2| + |2x-4| = \begin{cases} -x+2-2x+4 & \text{khi } x < 2 \\ x-2+2x-4 & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} -3x+6 & \text{khi } x < 2 \\ 3x-6 & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$.



§3. HÀM SỐ BẬC HAI

Vấn đề 1: **Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ khi biết các tính chất của đồ thị và của hàm số**

Bài 1.

- Với đồ thị (1) ta có:
  – Đồ thị quay bề lõm lên trên nên $a > 0$.
  – Hoành độ đỉnh là $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ nên $b < 0$.
  – Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là c nên $c < 0$.
- Với đồ thị (2) ta có:
  – Đồ thị quay bề lõm lên trên nên $a > 0$.
  – Hoành độ đỉnh là $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ nên $b < 0$.
  – Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là c nên $c > 0$.
- Với đồ thị (1) ta có:
  – Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$.
  – Hoành độ đỉnh là $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ mà $a < 0$ nên $b < 0$.
  – Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là c nên $c > 0$.
- Với đồ thị (1) ta có:
  – Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$.

– Hoành độ đỉnh là $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ mà $a < 0$ nên $b > 0$.

– Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là c nên $c < 0$.

Bài 2. a) (P) qua A và B nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 = a(2-m)^2 \\ 12 = a(4-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 12 = a.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ m = 2 \end{cases}.$$

b) (P) qua A $\Leftrightarrow 8 = a(1-m)^2$ (1)

Phương trình của (P) có dạng $x = m \Rightarrow m = 3$.

Thay vào (1) ta được $4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$. Vậy $a = 2$ và $m = 3$.

Bài 3.

a) (P) qua A và B nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4 = (-1)^2 - b + c \\ -2 = 2^2 + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 3 \\ 2b + c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases}.$$

b) Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt GTNN tại $x = -\dfrac{b}{2}$. Theo giả thiết ta có:

$-\dfrac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = -4$. Khi đó (P): $y = x^2 - 4x + c$.

Ta có $M(2; -1) \in (P) \Leftrightarrow -1 = 4 - 8 + c \Leftrightarrow c = 3$. Vậy $b = -4$ và $c = 3$.

Bài 4.

a) Vì hàm số có GTNN nên $a > 0$.

Khi đó hàm số đạt GTNN tại $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2a} = \dfrac{2}{a}$.

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2$. Do đó (P): $y = 2x^2 - 4x + c$.

Lại có $M(1; 3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = 2 - 4 + c \Leftrightarrow c = 5$. Vậy $a = 2$ và $c = 5$.

b) Đồ thị cắt trục tung tại tại điểm có tung độ $7 \Rightarrow c = 7$.

Do đó (P): $y = ax^2 - 4x + 7$.

Vì (P) đạt GTNN bằng $3 \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{16 - 28a}{4a} = \dfrac{7a - 4}{a} = 3$ và $a > 0$

$\Leftrightarrow 7a - 4 = 3a \Leftrightarrow 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ (nhận).

Vậy $a = 1$ và $c = 7$.

Bài 5.

a) Hàm số f là hàm số chẵn $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow b = 0$. Do đó $f(x) = ax^2 + c$.

Lại có đồ thị (P) đi qua 2 điểm $A(-1; 1)$, $B(2; -5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 3 \end{cases}.$$ Vậy $a = -2$; $b = 0$ và $c = 3$.

b) Đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow (P): y = ax^2 + bx$.

Lại có (P) có đỉnh $S(1; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ S \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$.

Vậy $a = 2$; $b = -4$ và $c = 0$.

c) Đồ thị (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ $-8 \Rightarrow c = -8$

$\Rightarrow (P): y = ax^2 + bx - 8$.

Hàm số đạt GTLN bằng 0 khi $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 (a < 0) \\ M(2;0) \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b = -4a \\ 4a + 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b = -4a \\ 4a - 8a - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Vậy $a = -2$; $b = 8$ và $c = -8$.

d) Đường thẳng $y = 3$ cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ là -1 và 3

$\Rightarrow A(-1; 3)$ và $(3; 3)$ thuộc (P)

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 4b = 0 \\ c = 3 - a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 3 - 3a \end{cases} \quad (1).$$

Hàm số đạt GTNN bằng $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 4a \quad (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được:

$(-2a)^2 - 4a(3 - 3a) = 4a \Leftrightarrow 4a^2 - 4a(3 - 3a) = 4a$

$\Leftrightarrow a - (3 - 3a) = 1$ (do $a > 0$) $\Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1$; $b = -2$ và $c = 0$.

Vấn đề 2: **Vẽ đồ thị của hàm số bậc hai và đồ thị của hàm số bậc hai chứa dấu giá trị tuyệt đối**

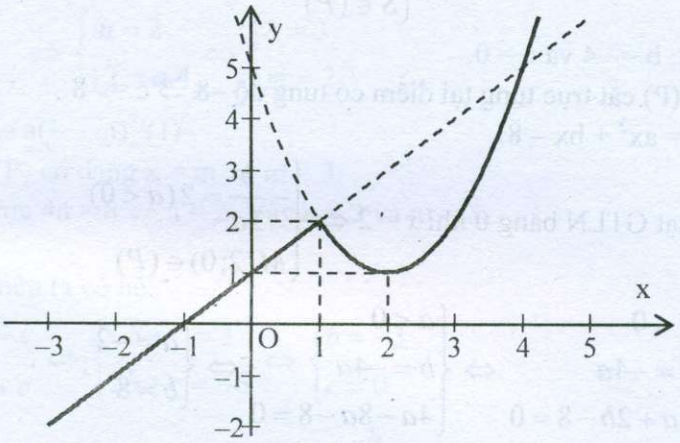
Bài 1.

Hàm số	Tọa độ đỉnh	Phương trình trục đối xứng	Bề lõm	Tọa độ giao điểm của (P) và Oy	Tọa độ giao điểm của (P) và Ox
$y = -x^2 + 4$	S(0; 4)	$x = 0$	xuống dưới	(0; 4)	$(\pm 2; 0)$
$y = x^2 - 4x + 5$	S(2; 1)	$x = 2$	lên trên	(0; 5)	không có
$y = -2x^2 + 4x$	S(1; 18)	$x = 1$	xuống dưới	(0;16)	(–2;0), (4;0)
$y = x^2 + 2x - 8$	S(–1;–9)	$x = -1$	lên trên	(0;–8)	(2;0), (–4;0)

Bài 2.

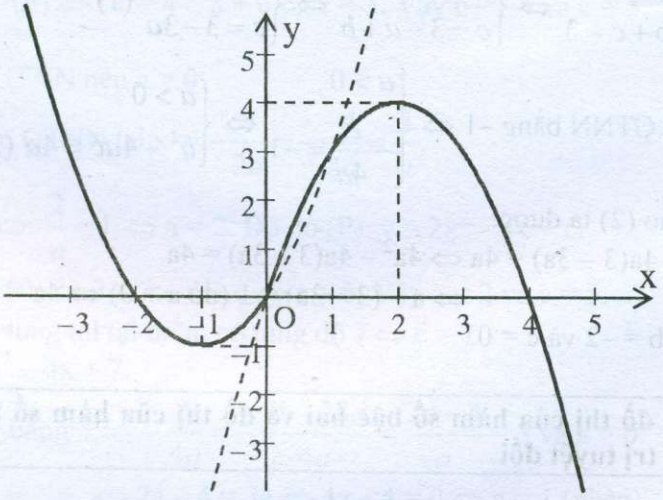
a) Ta có với $x \geq 1$ thì $y = x^2 - 4x + 5$ là parabol (P) có đỉnh S(2; 1) và khi $x < 1$ thì $y = x + 1$ là đường thẳng qua hai điểm (–1; 0) và (1; 2).

Ta có đồ thị (G) có dạng sau:



b) Ta có với $x \geq 0$ thì $y = -x^2 + 4x$ là parabol (P) có đỉnh S(2; 4) và khi $x < 0$ thì $y = x^2 + 2x$ là parabol (P') có đỉnh S'(–1; –1).

Ta có đồ thị (G) có dạng sau:



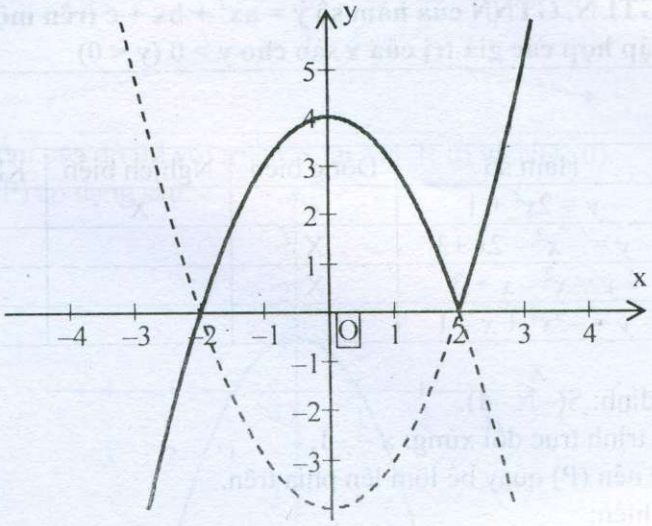
Bài 3.

a) Ta có: $y = \begin{cases} (x-2)(x+2) \text{ khi } x \geq 2 \\ (-x+2)(x+2) \text{ khi } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Với $x \geq 2$ thì $y = x^2 - 4$ có đồ thị là parabol (P) có đỉnh S(0; –4)

và khi $x < 2$ thì $y = 4 - x^2$ có đồ thị là parabol (P') có đỉnh S'(0; 4).

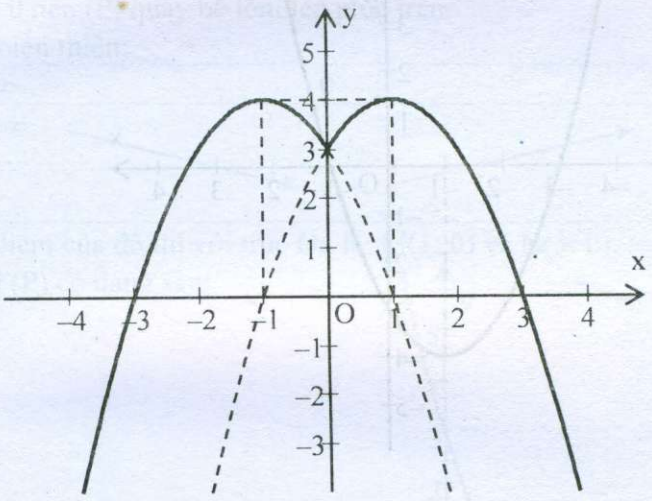
Ta có đồ thị (G) có dạng sau:



b) Ta có: $y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Với $x \geq 0$ thì $y = -x^2 + 2x + 3$ có đồ thị là parabol (P) có đỉnh S(1; 4) và khi $x < 0$ thì $y = -x^2 - 2x + 3$có đồ thị là parabol (P') có đỉnh S'(–1; 4).

Ta có đồ thị (G) có dạng sau:



Vấn đề 3: **Xét sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên một khoảng.**
Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên một đoạn.
Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y > 0$ ($y < 0$)

Bài 1.

Trong khoảng	Hàm số	Đồng biến	Nghịch biến	Không có kết luận
$(-1; 0)$	$y = 2x^2 + 1$		X	
$(-3; -2)$	$y = -x^2 - 2x + 3$	X		
$(1; 2)$	$y = x^2 - x + 3$	X		
$(-1; 1)$	$y = -2x^2 + x - 1$			X

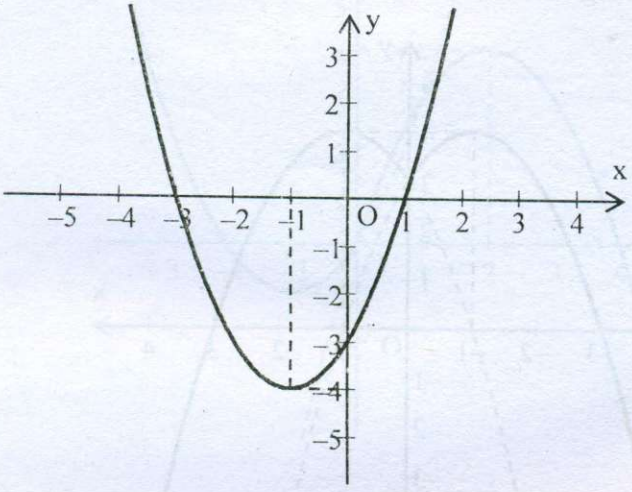
Bài 2.

a) ▸ Tọa độ đỉnh: S(–1; –4).
▸ Phương trình trục đối xứng: x = –1.
▸ Vì a > 0 nên (P) quay bề lõm lên phía trên.

b) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị (P) có dạng sau:



c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là –4, đạt tại x = –1.

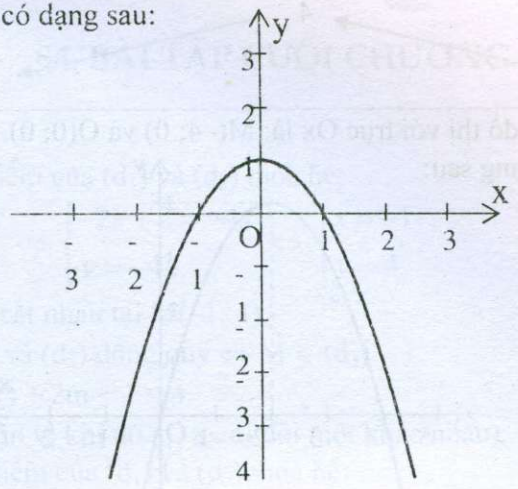
Bài 3.

a) ▸ Tọa độ đỉnh: S(0; 1).
▸ Phương trình trục đối xứng: x = 0.
▸ Vì a < 0 nên (P) quay bề lõm xuống phía dưới.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

- Giao điểm của đồ thị với trục Ox là: M(–1; 0) và N(1; 0).
- Đồ thị (P) có dạng sau:

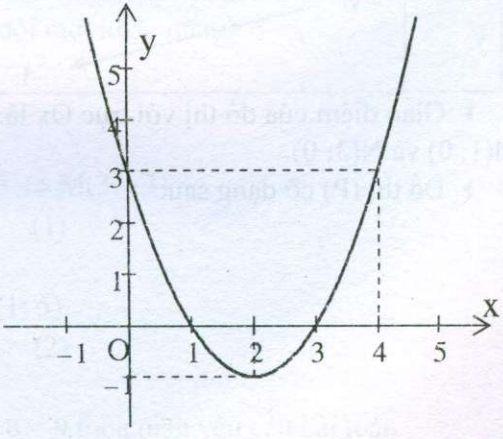


- Dựa vào đồ thị ta có: $y \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

b)
- Tọa độ đỉnh: S(2; –1).
- Phương trình trục đối xứng: $x = -1$.
- Vì $a > 0$ nên (P) quay bề lõm lên phía trên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	–1	↗	$+\infty$

- Giao điểm của đồ thị với trục Ox là: M(1; 0) và N(3; 0).
- Đồ thị (P) có dạng sau:



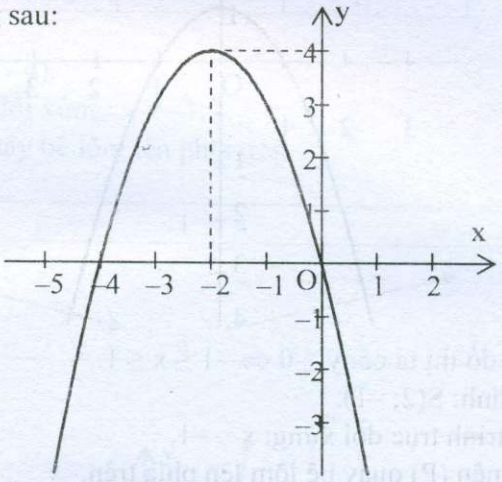
- Dựa vào đồ thị ta có:
  $y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hay $x \geq 3$.

c) $y = -(x + 2)^2 + 4 = -x^2 - 4x$

- Tọa độ đỉnh: S(–2; 4).
- Phương trình trục đối xứng: x = –2.
- Vì a < 0 nên (P) quay bề lõm xuống phía dưới.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

- Giao điểm của đồ thị với trục Ox là: M(–4; 0) và O(0; 0).
- Đồ thị (P) có dạng sau:



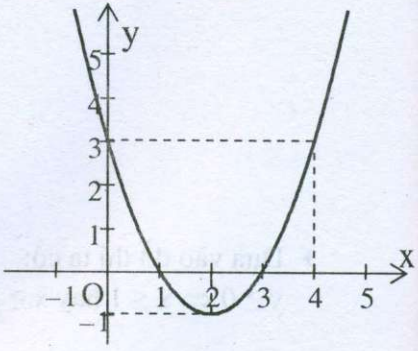
- Dựa vào đồ thị ta có: $y \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 0$.

Bài 4. a) ▸ Tọa độ đỉnh: S(2; –1).

- Phương trình trục đối xứng: x = 2.
- Vì a > 0 nên (P) quay bề lõm lên phía trên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	–1	↗	$+\infty$

- Giao điểm của đồ thị với trục Ox là: M(1; 0) và N(3; 0).
- Đồ thị (P) có dạng sau:



b) Dựa vào đồ thị ta có: Trong khoảng (0; 1) thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải nên trong khoảng (0; 1) hàm số đã cho nghịch biến.

c) Dựa vào đồ thị ta có: $y \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

d) Dựa vào phần đồ thị (P) trên đoạn [0; 3], ta có:

– GTLN của hàm số trên [0; 3] bằng 3, đạt tại x = 0.

– GTNN của hàm số trên [0; 3] bằng –1, đạt tại x = 2.

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

Bài 1.

a) Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) thỏa hệ:

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = -4x \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại M(–1; 4).

Do đó: (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy $\Leftrightarrow$ M $\in$ (d_3)

$\Leftrightarrow (m - 1)(-1) + 2m + 1 = 4$

$\Leftrightarrow$ m = 2 (nhận vì khi đó a_1, a_2, a_3 đôi một khác nhau).

b) Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_3) thỏa hệ:

$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = x - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2 = x - m \\ y = x - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-2}{3} \\ y = x - m \end{cases}.$$

Vậy (d_1) và (d_3) cắt nhau tại $N\left(\dfrac{m-2}{3}; \dfrac{-2m-2}{3}\right)$.

Do đó: (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy $\Leftrightarrow$ N $\in$ (d_2)

$$\Leftrightarrow 3m.\frac{m-2}{3} - m^2 + \frac{2}{3} = \frac{-2m-2}{3}$$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 3m^2 + 2 = -2m - 2$

$\Leftrightarrow$ m = 1 (nhận vì khi đó a_1, a_2, a_3 đôi một khác nhau).

Bài 2.

* Ta có (d): y = ax + b.

* Gọi M = (d) $\cap$ (D_1) $\Rightarrow$ $M(3; y_M)$.

Ta có M $\in$ (D_1) $\Leftrightarrow$ $y_M = -2.3 + 3 = -3$ $\Leftrightarrow$ M(3; –3).

M $\in$ (d) $\Leftrightarrow$ $-3 = 3a + b$ (1)

* Gọi N = (d) $\cap$ (D_2) $\Rightarrow$ $N(x_N; 5)$.

Ta có N $\in$ (D_2) $\Leftrightarrow$ $5 = 4.x_N + 1$ $\Leftrightarrow$ N(1; 5).

N $\in$ (d) $\Leftrightarrow$ $5 = a + b$ (2)

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow$ $-8 = 2a \Rightarrow a = -4$.

Thay vào (2) $\Rightarrow$ b = 9. Vậy a = –4 và b = 9 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3.

a) Cách 1: Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (d) với trục Ox và trục Oy.

Ta có M(m; 0) và N(0; n) với m, n > 0.

Vì Δ OMN vuông cân tại O nên OM = ON ⇒ m = n.

Ta có (d): y = ax + b.

$$\text{(d) qua I, M và N} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=3 \\ ma+b=0 \\ b=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+m=3 \\ ma+m=0 \\ b=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases}.$$

Vậy (d): y = –x + 5.

Cách 2: Vì (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N có tọa độ dương nên góc xMN bằng 135^0 ⇒ (d) có hệ số góc là a = $\tan 135^0 = -1$.

⇒ (d): y = –x + b.

Lại có (d) qua I nên 3 = –2 + b ⇔ b = 5. Vậy (d): y = –x + 5.

b) Ta có (d): y = ax + b.

(d) qua I ⇔ 2 = 2a + b ⇔ b = 2 – 2a. Do đó (d): y = ax + 2 – 2a.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (d) với trục Ox và trục Oy.

Ta có $M(x_M; 0)$ và $N(0; y_N)$ với $x_M, y_N > 0$.

$$M \in (d) \Leftrightarrow ax_M + 2 - 2a = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{2a-2}{a}.$$

$$N \in (d) \Leftrightarrow y_N = 2 - 2a.$$

$$\text{Vì } \Delta OMN \text{ vuông tại O nên } S_{OMN} = \frac{1}{2}OM.ON = \frac{x_M y_N}{2}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$x_M y_N = 18 \Leftrightarrow \frac{2a-2}{a}.(2-2a) = 18$$

$$\Leftrightarrow -4a^2 + 8a - 4 = 18a \Leftrightarrow 4a^2 + 10a + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

- a = –2: $x_M = 3 > 0$, $y_N = 6 > 0$ nên a = –2 (nhận).
- $a = -\frac{1}{2}$: $x_M = 6 > 0$; $y_N = 3 > 0$ nên $a = -\frac{1}{2}$ (nhận).

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là: (d): y = –2x + 6; (d): $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Bài 4.

a) Ta có $A(-1; y_A) \in (d) \Leftrightarrow y_A = m(-1) + 2m - 4 = m - 4 \Rightarrow A(-1; m-4)$.

$B(2; y_B) \in (d) \Leftrightarrow y_B = m.2 + 2m - 4 = 4m - 4 \Rightarrow B(2; 4m-4)$.

b) Ta có: A và B nằm phía trên trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} y_A > 0 \\ y_B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4>0 \\ 4m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$

c) Vì đồ thị (d) với $x \in [-1; 2]$ là đoạn thẳng AB nên:

$f(x) > 0, \forall x \in [-1; 2] \Leftrightarrow$ A và B cùng nằm phía trên Ox $\Leftrightarrow m > 4$.

Bài 5.

a) Ta có: (P) qua A, B, C

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 8 \\ a.1^2 + b.1 + c = 0 \\ a.4^2 + b.4 + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 8 \\ a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a + c = 4 \\ 16a + c = 19 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 1; b = -4$ và $c = 3$.

b) (P) có đỉnh S(–2; –2) và qua điểm M(–4; 6).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ S \in (P) \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a.4 + b.(-2) + c = -2 \\ a.16 + b(-4) + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a - 4b + c = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = -2 \\ 8a - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = -2.$$

c) (P) đi qua A(4; –6), cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ là 1 và 3

$\Leftrightarrow$ A(4; –6), M(1; 0) và N(3; 0) thuộc (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = -6 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = -6 \end{cases}.$$

Bài 6.

a) (P) có đỉnh là S(0; 3) và một trong hai giao điểm của (P) với Ox là A(–2; 0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \in (P) \\ A(-2;0) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a(-2)^2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

b) (P) đi qua hai điểm A(1; 1) và B(2;–2).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Bài 7.

a) (P) có đỉnh là S(1; 0), cắt đường thẳng $y = 4$ tại hai điểm có hoành độ –1 và 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \in (P) \\ A(-1;4) \in (P) \\ B(3;4) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 4 \\ a.3^2 + b.3 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 1; b = -2$ và $c = 1$.

b) (P) qua điểm A(–2; 3), cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ B(1;0) \in (P) \\ C(0;3) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ a + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Bài 8.

a) Đồ thị (P) của hàm số đi qua điểm A(–2; 3)

$\Leftrightarrow m(-2)^2 - 2m(-2) - 3m - 5 = 0 \Leftrightarrow 5m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

b) (P) cắt trục Ox tại hai điểm, trong đó một điểm có hoành độ là 2

$\Leftrightarrow M(2; 0) \in (P)$

$\Leftrightarrow m.2^2 - 2m.2 - 3m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}.$

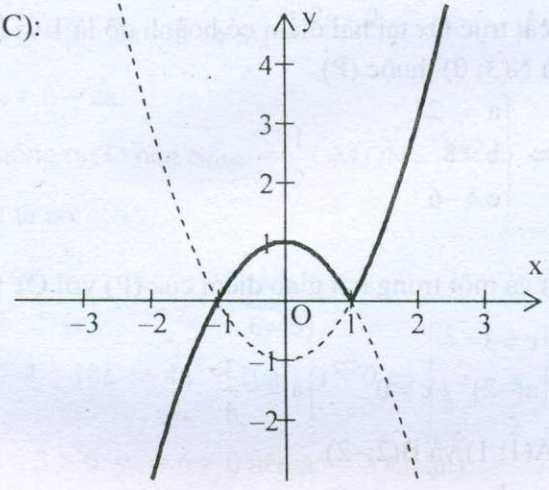
c) Ta có: (P) có đỉnh là $S \begin{cases} x = 2 \\ y = -3m - 5 \end{cases}.$

Do đó: Đỉnh của (P) thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$

$\Leftrightarrow -3m - 5 = 3.2 - 2 \Leftrightarrow -3m = 9 \Leftrightarrow m = -3.$

Bài 9.

a) Vẽ đồ thị (C):



▸ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

b) Gọi M là giao điểm của (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y = \frac{3}{4}$.

TH1: $x_M \geq 1$: $M \in (C) \Leftrightarrow y_M = x_M^2 - 1 \Leftrightarrow x_M^2 - 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_M = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

TH2: $x_M < 1$: $M \in (C) \Leftrightarrow y_M = -x_M^2 + 1 \Leftrightarrow -x_M^2 + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_M = \pm\frac{1}{2}$.

Vậy đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt (C) tại ba điểm là:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4}\right), M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right), M_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

c) Ta có:

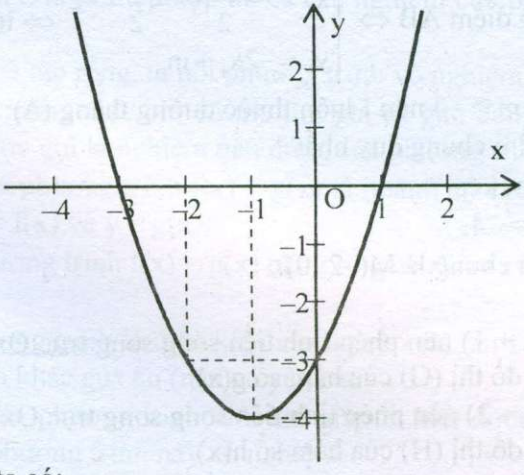
Phương trình f(x) = m (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (D): y = m với đồ thị (C). Do đó số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (C) và (D).

Dựa vào đồ thị (C) và đường thẳng (D): $y = m$ ta có:

- $m > 1$: (C) và (D) có một giao điểm nên (1) có một nghiệm.
- $m = 1$: (C) và (D) có hai giao điểm nên (1) có hai nghiệm.
- $0 < m < 1$: (C) và (D) có ba giao điểm nên (1) có ba nghiệm.
- $m = 0$: (C) và (D) có hai giao điểm nên (1) có hai nghiệm.
- $m < 0$: (C) và (D) có một giao điểm nên (1) có một nghiệm.

Bài 10.

a) Vẽ đồ thị (P):



b) Dựa vào đồ thị ta có:

$y \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của x sao cho $y \le 0$ là $[-3; 1]$.

c) Ta có:

- Với $x \in (-3; -1)$ thì đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trong khoảng $(-3; -1)$.
- Với $x \in (-1; 0)$ thì đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$.

d) Dựa vào phần đồ thị hàm số trên đoạn $[-2; 1]$, ta có:

- GTLN của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ là 0, đạt được tại $x = 1$.
- GTNN của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ là -4, đạt được tại $x = -1$.

Bài 11.

a) Đồ thị (P_m) đi qua điểm A(–2; 1).

$\Leftrightarrow m.(-2)^2 - (m+1).(-2) - 2m - 9 = 1 \Leftrightarrow 4m = 8 \Leftrightarrow m = 2.$

b) Gọi K(x; y) là điểm mà (P_m) đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

$\Leftrightarrow K \in (P_m), \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = mx^2 - (m+1)x - 2m - 9, \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)m - 9 - y = 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ -9 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ hay } x = 2 \\ y = -9 \end{cases}.$$

Vậy các điểm mà (P_m) luôn đi qua là $K_1(-1; -9)$ và $K_2(2; -9)$.

Bài 12.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2 + 2x = -2x + m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0$ (1)

Ta có: (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 hai nghiệm phân biệt x_A, x_B.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4.$

▸ Ta có: I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{S}{2} = -2 \\ y_I = -2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I(-2; m + 4).$

Vì $x_I = -2$ với mọi $m > -4$ nên I luôn thuộc đường thẳng (Δ): $x = -2$ cố định.

b) (P) và (d) có điểm chung duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -4.$

Khi đó tọa độ điểm chung là M(–2; 0).

Bài 13.

a) Ta có $g(x) = f(x + 1)$ nên phép tịnh tiến song song trục Ox sang trái 1 đơn vị sẽ biến đồ thị (P_0) thành đồ thị (G) của hàm số g(x).

b) Ta có $h(x) = f(x - 2)$ nên phép tịnh tiến song song trục Ox sang phải 2 đơn vị sẽ biến đồ thị (P_0) thành đồ thị (H) của hàm số h(x).

c) Ta có $k(x) = f(x + 2) - 3$ nên phép tịnh tiến song song trục Ox sang trái 2 đơn vị rồi tịnh tiến song song trục Oy xuống dưới 3 đơn vị sẽ biến đồ thị (P_0) thành đồ thị (K) của hàm số k(x).

d) Ta có $s(x) = f(x - 3) + 1$ nên phép tịnh tiến song song trục Ox sang phải 3 đơn vị rồi tịnh tiến song song trục Oy lên trên 1 đơn vị sẽ biến đồ thị (P_0) thành đồ thị (S) của hàm số s(x).

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Khái niệm phương trình một ẩn

1) Định nghĩa

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g.

Đặt $D = D_f \cap D_g$.

▸ Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là phương trình một ẩn số, x được gọi là ẩn số của phương trình.

▸ Số $x_0 \in D$ sao cho "$f(x_0) = g(x_0)$" là một mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

▸ Giải phương trình là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đó (gọi là tập nghiệm).

– Nếu tập nghiệm là tập rỗng, ta nói phương trình vô nghiệm.

– Nhiều khi ta chỉ cần, hoặc chỉ có thể tìm giá trị gần đúng của nghiệm (với độ chính xác nào đó), được gọi là nghiệm gần đúng của phương trình.

▸ Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị nói trên.

2) Chú ý

Điều kiện của phương trình là điều kiện của ẩn số x để hai vế của phương trình có nghĩa và các điều kiện khác của ẩn (nếu có yêu cầu).

– Tìm điều kiện của phương trình, đôi khi giúp ta biết được nghiệm của phương trình hoặc biết được phương trình này vô nghiệm.

– Khi các phép toán ở hai vế của phương trình đều thực hiện được $\forall x \in \mathbb{R}$ thì ta không cần ghi điều kiện của phương trình.

II. Phương trình tương đương

1) Định nghĩa

Hai phương trình "$f_1(x) = g_1(x)$" và "$f_2(x) = g_2(x)$" được gọi là **tương đương** nếu chúng **có cùng tập nghiệm**.

Khi đó ta viết: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

2) Biến đổi tương đương các phương trình:

Một phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của một phương trình được gọi là phép biến đổi tương đương. Phép biến đổi tương đương sẽ biến một phương trình thành một phương trình mới tương đương.

3) Định lí

Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D và hàm số $y = h(x)$ xác định trên D ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D, phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau:

1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

2) $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ nếu $h(x) \neq 0 \ \forall x \in D$

III. Phương trình hệ quả

1) Định nghĩa: Giả sử phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ (1) có tập nghiệm là S_1; phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ (2) có tập nghiệm là S_2.

– Nếu $S_1 \subset S_2$, ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1). Khi đó ta viết: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$

2) Định lí

Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

3) Chú ý

Nếu giải một phương trình bằng phép biến đổi tương đương mà phát sinh nhiều điều kiện phức tạp, ta có thể giải phương trình hệ quả rồi chọn nghiệm bằng cách thử lại.

IV. Phương trình nhiều ẩn

1) Phương trình 2 ẩn là một mệnh đề chứa hai biến $f(x, y) = g(x, y)$.

Cặp số (x_0,y_0) thỏa mãn $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$ được gọi một nghiệm của phương trình.

2) Phương trình 3 ẩn là một mệnh đề chứa ba biến $f(x,y,z) = g(x,y,z)$.

Bộ ba $(x_0; y_0; z_0)$ thỏa mãn $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình.

Ví dụ:

a) $2x^2 + 4xy - y^2 = -x + 2y + 3$ là một phương trình hai ẩn.

Cặp số (1; 0) là một nghiệm của phương trình này

b) $x + y + z = 3xyz$ là một phương trình ba ẩn.

Bộ ba (1; 1; 1) là một nghiệm của phương trình

V. Phương trình chứa tham số

Khi các hệ số của một phương trình chứa những chữ khác ngoài các ẩn, các chữ này được xem là những số đã biết và được gọi là tham số.

Tập nghiệm của phương trình này phụ thuộc vào tham số.

Tìm tập nghiệm của một phương trình chứa tham số được gọi là giải và biện luận phương trình đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm điều kiện của phương trình

1. Phương pháp

a. Điều kiện của phương trình là điều kiện của ẩn số x để hai vế của phương trình có nghĩa và các điều kiện khác của ẩn (nếu có yêu cầu).

b. Tìm điều kiện của phương trình, đôi khi giúp ta biết được nghiệm của phương trình hoặc biết được phương trình này vô nghiệm.

2. Ví dụ

Tìm điều kiện của các phương trình và suy ra tập nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x + 1 - \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x} + 3$

b) $\sqrt{2x-3} + x - 1 = \sqrt{1-x}$.

Giải

a) * Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

* Thay $x = 1$ vào phương trình ta được: $2.1 + 1 - \sqrt{1-1} = \sqrt{1-1} + 3$ (đúng)

Suy ra $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

b) * Điều kiện: $\begin{cases} 2x-4 \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Suy ra không có giá trị x nào thỏa điều kiện của phương trình nên phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

3. Bài tập

1. Tìm điều kiện của phương trình và suy ra tập nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x} = \sqrt{x-3}$

b) $2x - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 6$

c) $\sqrt{x-5} = 3 - x$

d) $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$

e) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{4-x^2} = x + \sqrt{2-x}$

f) $2 - x + \sqrt{x-3} = \sqrt{-x+1}$

g) $x + \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9-x^2} - 3$

h) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

2. Tìm điều kiện của phương trình hai ẩn sau rồi suy ra tập nghiệm của nó

a) $\sqrt{-x^2-(y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1)$

b) $\sqrt{-x^2+6x-y^2+2y-10} + x + y = 4 + (x-3)(y+2)$

Vấn đề 2: Giải phương trình bằng phép biến đổi tương đương

1. Phương pháp

Áp dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi phương trình đã cho (1) tương đương với phương trình (2).

Giải phương trình (2) và chọn nghiệm theo điều kiện ở trên.

Chú ý:

a. Nếu thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế mà điều kiện của phương trình không bị thay đổi thì ta được 1 phương trình tương đương.

b. Giả sử h(x) là hàm số xác định $\forall x$ thuộc tập xác định của phương trình f(x) = g(x) thì ta có:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

hoặc $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x)$ nếu $h(x) \neq 0 \ \forall x \in D$

c. Một vài phép biến đổi tương đương cơ bản.

Các dạng thường gặp:

- $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \ (\text{hay } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

2. Ví dụ

Giải các phương trình:

a) $|x - 2| = 2x - 1$ (1) b) $\sqrt{x-1} = x - 3$ (2)

Giải

a) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |x-2| = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-2 = 2x-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x-2 = -2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là S = {1}.

b) Điều kiện: $x \geq 3$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x-1 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ (loại) hoặc $x = 5 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là S = {5}.

3. Bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $x + 1 + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+5}{x+3}$ b) $\dfrac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4}$

c) $\sqrt{(x-1)(x^2-3)} = x - 1$ d) $x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = x$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x}{3\sqrt{x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ b) $\dfrac{x}{2\sqrt{x-3}} = \dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

c) $x + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$ d) $x + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x-2}$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$ b) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

c) $x^2 + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} + 10$ d) $\sqrt{x-4}\,(x^2 - 4x + 3) = 0.$

4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{|x|}{\sqrt{x-1}} = x\sqrt{x-1}$ b) $\frac{2|x|}{\sqrt{x-1}} = x^2\sqrt{x-1}$

c) $2|x-1| = 2x - 3$ d) $x|x-1| = -(x-2)^2$.

5. Giải các phương trình sau:

a) $x\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$ b) $x + (x^2 + 1)\sqrt{x-m} = m$

c) $1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = x^2$ d) $\frac{x^2 - 3x - m^2}{\sqrt{x-m^2}} = \sqrt{x-m^2}$.

Vấn đề 3: Giải phương trình bằng cách giải phương trình hệ quả

1. Phương pháp

Nếu giải một phương trình bằng phép biến đổi tương đương mà phát sinh nhiều điều kiện phức tạp, ta có thể giải phương trình hệ quả rồi chọn nghiệm bằng cách thử lại.

2. Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2+5} = x + \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ (1)

Giải

$(1) \Rightarrow \sqrt{x^2+5}.\sqrt{x^2-3} = x\sqrt{x^2-3} + 1$

$\Rightarrow (x^2+5)(x^2-3) = x^2(x^2-3) + 1 + 2x\sqrt{x^2-3}$.

$\Rightarrow 2x\sqrt{x^2-3} = 5x^2 - 16 \Rightarrow 4x^2(x^2-3) = 25x^4 - 160x^2 + 256$

$\Rightarrow 21x^4 - 146x^2 + 256 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = \frac{64}{21}$. $\Rightarrow x = \pm 2$ hoặc $x = \pm \frac{8}{\sqrt{21}}$.

Thử lại ta được $x = 2$ hoặc $x = -\frac{8}{\sqrt{21}}$ là nghiệm của (1).

3. Bài tập

Giải phương trình hệ quả để tìm nghiệm của các phương trình sau:

1) $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ 2) $x + \sqrt{x^2-9} = \frac{54}{\sqrt{x^2+11}}$

3) $\frac{\sqrt{25-x^2}+2}{\sqrt{x+6}} = \sqrt{7-x}$. 4) $x^2 + 1 + \sqrt{x^2-3} + x\sqrt{x^2+5} = 0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng:

$ax + b = 0$ (1) với x là ẩn, $a \neq 0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Do đó tập nghiệm của (1) là $S = \{-\frac{b}{a}\}$.

II. Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ với x là ẩn, $a \neq 0$

1. Công thức nghiệm

$\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta > 0$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Nếu $\Delta = 0$: phương trình có 1 nghiệm (kép) $x = -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

2. Định lí Vi-ét

Nếu hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ thì chúng thỏa mãn các hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

3. Ứng dụng của định lí Vi-ét

a) Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai:

Đặc biệt: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$

$a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$

b) Phân tích đa thức thành nhân tử:

Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

c) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng:

Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

d) Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:

Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 \leqslant x_2$).

Đặt $S = -\frac{b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$. Khi đó:

Nếu $P < 0$ thì $x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu)

Nếu $P > 0$ và $S > 0$ thì $0 < x_1 \leqslant x_2$ (hai nghiệm dương)

Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì $x_1 \leqslant x_2 < 0$ (hai nghiệm âm)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Giải và biện luận phương trình dạng ax + b = 0

1. Phương pháp

a) Giả sử hai hệ số a và b chứa tham số m. Ta xét các trường hợp sau:

1) $a \neq 0$: nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$

2) $a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm

3) $a = 0$ và $b = 0$: phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

b) Trong trường hợp bài toán có kèm theo điều kiện, thì ta cần so sánh nghiệm với điều kiện.

2. Ví dụ

Giải và biện luận phương trình: $m^2 x - 4 = 16x + m$ (1)

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (m^2 - 16)x = m + 4$

- $m^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$ và $m \neq -4$:

  Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{m+4}{m^2-16} = \frac{1}{m-4}$

- $m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$:

  Với $m = 4$: phương trình trở thành $0x = 8$ nên phương trình vô nghiệm.

  Với $m = -4$: phương trình trở thành $0x = 0$ nên phương trình có nghiệm x tùy ý.

Kết luận: * $m \neq 4$ và $m \neq -4$: $S = \left\{\frac{1}{m-4}\right\}$.

* $m = 4$: $S = \varnothing$.

* $m = -4$: $S = \mathbb{R}$.

3. Bài tập

1. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $2(m - 1)x - m(x - 1) = 2m - 3$ b) $3(m + 2)x + 4 = 2x + 5(m + 2)$

c) $m^2(x - 1) = x - 3m + 2$ d) $m^2x - 9 = 9mx + 3m$.

2. Giải và biện luận các phương trình:

a) $m(m^2 - 1)x = m(m + 1)$ b) $x\sqrt{m-2} = m - 2$.

c) $(m + 1)x = \sqrt{m+1}$ d) $\frac{(m-2)x}{m-1} = \frac{m^2-4}{m-1}$.

3. Giải và biện luận các phương trình:

a) $m^2(x - 1) = 2 - 2x$ b) $2x(m - 1) = m(x - 1) + m^2 - 2$

c) $m^3x + 1 = m^2(x + 1)$ d) $(x - 1)m^2 - (2x + 1)m + x + 2 = 0$.

4. Giải và biện luận phương trình: $\frac{x-a}{a-b} + \frac{x-b}{a+b} + \frac{2b(x+a)}{a^2-b^2} = 0 \ (a \neq \pm b)$.

Vấn đề 2: Định m để phương trình ax + b = 0 thỏa điều kiện về tập nghiệm

1. Phương pháp: Xét phương trình $ax + b = 0$ (1).

a) (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

b) (1) có vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

c) (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.

d) (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{cases}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Định m để phương trình sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$m^2(x - 1) + 3x = 4mx - 9$ (1).

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (m^2 - 4m + 3)x + 9 - m^2 = 0$; $a = m^2 - 4m + 3$, $b = 9 - m^2$.

Do đó: (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 9 - m^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hay } m = 3 \\ m = -3 \text{ hay } m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 3$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $m^3x - m^2(3x - 1) + 3(x + 1) + 4m = mx$ (2)

Định m để phương trình (2) vô nghiệm.

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow m^3x - 3m^2x + m^2 + 3x + 3 + 4m = mx$

$\Leftrightarrow (m^3 - 3m^2 - m + 3)x + m^2 + 4m + 3 = 0.$

($a = m^3 - 3m^2 - m + 3 = (m^2 - 1)(m - 3)$, $b = m^2 + 4m + 3$)

Do đó (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)(m - 3) = 0 \\ m^2 + 4m + 3 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 1 \vee m = 3 \\ m \neq -1 \wedge m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ m = 3 hoặc m = 1.

Ví dụ 3: Cho phương trình $m^2(x + 1) = 2(2x - 1) + 3m$ (3).

Định m để phương trình (3) có nghiệm.

Giải

Ta có (3) $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ ($a = m^2 - 4$ và $b = m^2 - 3m + 2$).

Cách 1: (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \wedge m \neq -2 \\ \begin{cases} m = 2 \vee m = -2 \\ m = 1 \vee m = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \wedge m \neq -2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2.$$

Vậy (3) có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -2$.

Cách 2: (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \vee m = -2 \\ m \neq 1 \wedge m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -2$. Do đó (3) có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -2$.

3. Bài tập

1. Định m để các phương trình sau vô nghiệm:
   a) $(m + 1)x - (x + 2m) = 4$ b) $(m + 1)^2x - 2 = (4m + 9)x + m$
   c) $m^2(x - 1) = 2(2x - m - 4)$ d) $(4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x$
2. Xác định các giá trị của tham số để các phương trình sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$:
   a) $m^2x + m + 2 = m^2 + 4x$ b) $a(x + 1) + b(2x - 1) = x - 2$
   c) $m^2x - m = 4x - 2$ d) $m^2(x - 1) = 9x + m - 6$
3. Định m để các phương trình sau có nghiệm:
   a) $m^2x = 4x + m^2 + m - 2$ b) $m^2(x - 1) = x - m$
   c) $m(x - m) = x - m$ d) $m(x - 1) = x - m^2$

Vấn đề 3: Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

1. Phương pháp

- Trường hợp $a = 0$: Ta giải phương trình $bx + c = 0$.
- Trường hợp $a \neq 0$: Ta tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

  * $\Delta > 0$: (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

  * $\Delta = 0$: (1) có một nghiệm (kép) là $x = -\dfrac{b}{2a}$.

  * $\Delta < 0$: (1) vô nghiệm.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$ (1)

Giải và biện luận phương trình (1) theo tham số m.

Giải

- $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$: (1) $\Leftrightarrow 0x - 4 = 0$: Phương trình vô nghiệm.
- $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: $\Delta' = 4m + 4$.

  * $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$:

  (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{m + 1 \pm \sqrt{4m + 4}}{m + 1}$.

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$: (1) vô nghiệm.

Kết luận:

* $m > -1$: (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{m+1 \pm \sqrt{4m+4}}{m+1}$.

* $m \le -1$: (1) vô nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình $\dfrac{x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3}{\sqrt{x-2}} = 0$ (2).

Giải và biện luận phương trình (2).

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0 \quad (3) \\ x > 2 \end{cases}.$$

Ta có (3) có $a = 1 \neq 0$ và $\Delta' = 2m - 2$.

- $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 1$: (3) vô nghiệm nên (2) vô nghiệm.
- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (3) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b'}{a} = \dfrac{m+1}{1} = 2$ (loại).

  Vậy (2) vô nghiệm.
- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$: (3) có hai nghiệm phân biệt là

  $x_1 = m+1-\sqrt{2m-2}$; $x_2 = m+1+\sqrt{2m-2}$.

Ta thấy: Với $m > 1$ thì $x_2 > 2$.

Lại có $x_1 > 2 \Leftrightarrow m+1-\sqrt{2m-2} > 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m-2} < m-1 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}\left(\sqrt{2} - \sqrt{m-1}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{m-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} > \sqrt{2} \Leftrightarrow m > 3.$$

Do đó: + $m > 3$: (2) có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

+ $1 < m \le 3$: (2) có một nghiệm là $x = x_2$.

Kết luận: * $m \le 1$: $S = \varnothing$.

* $1 < m \le 3$: $S = \left\{m+1+\sqrt{2m-2}\right\}$.

* $m > 3$: $S = \left\{m+1-\sqrt{2m-2};\ m+1+\sqrt{2m-2}\right\}$.

3. Bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $x^2 - (2-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} = 0$ b) $x^2 - \sqrt{5}(\sqrt{2}+1)x + 5\sqrt{2} = 0$

c) $x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$ d) $x^2 - 2x + 1 - 4m^2 = 0$

e) $x^2 - (m-2)x + 1 - m = 0$ f) $x^2 - (m^2-1)x + m^2 - 2 = 0$

2. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m (hoặc k):

a) $mx^2 - 2(m+3)x + m + 3 = 0$ b) $(m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 4m - 1 = 0$

c) $3mx^2 + (4-6m)x + 3(m-1) = 0$ d) $(k^2 - 5k - 36)x^2 - 2(k+4)x + 1 = 0$

e) $(x-1)[(k+1)x - 4] = 0$ f) $(mx-2)[(m-2)x + 2) = 0$

3. Xác định m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

a) $mx^2 - (1 - 2m)x + m + 4 = 0$ b) $(m - 2)x^2 + 2(m - 3)x + m - 5 = 0$

c) $(x - 2)[(m - 1)x + 2] = 0$ d) $(mx - 3)[(m + 1)x - 3] = 0$

4. Cho hai phương trình: $x^2 + 2x - m = 0$ (1) và $x^2 - 3x + 4m = 0$ (2).

Xác định m để hai phương trình trên có nghiệm chung. Suy ra giá trị của m để phương trình $(x^2 + 2x - m)(x^2 - 3x + 4m) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

5. Tìm các hệ số m và k trong phương trình $x^2 + mx + k = 0$, biết rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt lần lượt là m và k.

6. Cho hai phương trình: $x^2 - 8x + 4m = 0$ (1) và $x^2 + x - 4m = 0$ (2).

Xác định m để một trong các nghiệm của (1) gấp đôi một nghiệm của (2).

7. Tìm k nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình

$x^2 - 2(k + 2)x + k + 14 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

8. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 12 = 0$ (1).

Định m để phương trình (1) có hai nghiệm:

a) Có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

b) Có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau.

Vấn đề 4: Dùng phương pháp đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp

Giả sử phương trình được biến đổi về dạng $\mathbf{ax^2 + bx + c = m}$ (1)

trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$, còn m là tham số.

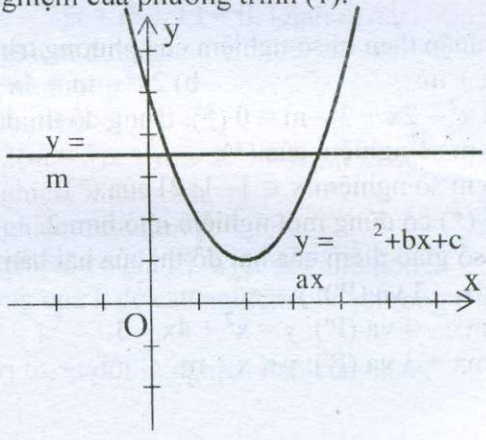
Bước 1: Ta nói rằng phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (P): $y = ax^2 + bx + c$ và (d): $y = m$.

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (d) và (P).

Bước 2: Vẽ parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng (d): $y = m$ trong cùng hệ trục tọa độ.

Đường thẳng (d) song song (hoặc trùng) với trục Ox, cắt trục Oy tại điểm có tung độ m.

Bước 3: Quan sát đồ thị, tùy theo giá trị của m, ta xác định được số giao điểm của hai đồ thị, từ đó suy ra số nghiệm của phương trình (1).



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho phương trình $\sqrt{x-1}(x^2-4x+1-m)=0$.

a) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+1=m \quad (2) \end{cases}$.

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

* (d): y = m là đường thẳng song song với Ox, cắt Oy tại điểm có tung độ m.

* (P): $y = x^2 - 4x + 1$ là parabol ứng với $x \geq 1$, có đỉnh (2;–3), bề lõm quay lên.

Khi x = 1 thì y = –2.

Theo đồ thị ta có:

a) Phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (d) và phần đồ thị (P) với $x \geq 1$ có giao điểm $\Leftrightarrow m \geq -3$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (d) và phần đồ thị (P) với $x \geq 1$ có đúng hai giao điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -3 < m \leq -2$.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì đồ thị của hai hàm số $y = 2mx + 2$ (d) và $y = (m-6)x^2 + m$ không cắt nhau?

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (d) và (P) là:

$(m-6)x^2 + m = 2mx + 2 \Leftrightarrow (m-6)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (1)

(d) và (P) không cắt nhau $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm

Với m = 6: (1) $\Leftrightarrow -12x + 4 = 0$: (1) có nghiệm

Với $m \neq 6$: (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 8m - 12 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

3. Bài tập

1. Dùng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau:

a) $x^2 - x + 2 = 3x + m$ b) $2x^2 - m = 4x - 3$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$ (*). Dùng đồ thị để:

a) Biện luận theo m số nghiệm của (*).

b) Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của (*).

c) Xác định m để (*) có đúng một nghiệm nhỏ hơn 2.

3. Biện luận theo m số giao điểm của hai đồ thị của hai hàm số sau:

a) (P): $y = -x^2 + 4x - 3$ và (P'): $y = x^2 - m$.

b) (P): $y = x^2 + 2mx - 4$ và (P'): $y = x^2 + 4x - 3$.

c) (P): $y = x^2 + 2mx + 3$ và (P'): $y = x - m$.

Vấn đề 4: Ứng dụng của định lí Vi-ét để xét dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

1. Phương pháp

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

Đặt $S = -\frac{b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$. Ta có các kết quả sau:

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow P < 0$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm dương $(0 < x_1 \leq x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm âm $(x_1 \leq x_2 < 0) \Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$.

2. Ví dụ

a) Không giải phương trình, hãy xét dấu nghiệm của phương trình sau (nếu có)

$$(2-\sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3}-1)x + 1 = 0$$

b) Không giải phương trình, hãy cho biết phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$\sqrt{3}x^4 + 3(\sqrt{2}-\sqrt{5})x^2 - \sqrt{11} = 0 \quad (1)$$

Giải

a) Ta có: $\Delta' = 2 - \sqrt{3} > 0$; $P = \frac{1}{2-\sqrt{3}} > 0$ và $S = -\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}} < 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

b) Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $\sqrt{3}t^2 + 3(\sqrt{2}-\sqrt{5})t - \sqrt{11} = 0$ (2)

Ta thấy phương trình (2) có $P = \frac{c}{a} = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 < 0 < t_2$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

3. Bài tập

1. Định m để phương trình $x^2 - (2m - 6)x + m^2 - 3m = 0$ (1)

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Có đúng một nghiệm dương.

2. Cho phương trình $x^2 + (m - 2)x + m + 13 = 0$. Định m để:

a) Phương trình có hai nghiệm dương.

b) Phương trình có nghiệm dương.

c) Có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

3. Cho phương trình $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 5 = 0$. Định m để:

a) Phương trình có hai nghiệm không âm.

b) Phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

c) Phương trình có hai nghiệm có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 2.

4. Tìm tất cả các giá trị dương của k để các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - (k + 2)x + 7 = k^2$$

trái dấu nhau và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau.

Vấn đề 5: **Ứng dụng của định lí Vi-ét để xét biểu thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai**

1. Phương pháp

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

a) Tìm một hệ thức giữa các nghiệm độc lập đối với tham số

* Phương trình (1) có hai nghiệm $x_{1,2} \Leftrightarrow \Delta \geq 0$.
* Ta tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2 theo tham số.
* Khử tham số giữa 2 hệ thức này ta được hệ thức phải tìm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm thỏa điều kiện (1) cho trước.

* Phương trình (1) có hai nghiệm $x_{1,2} \Leftrightarrow \Delta \geq 0$.
* Ta tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2 theo tham số.
* Thay các kết quả vào (1) ta được một phương trình hay bất phương trình ẩn m. Giải ra ta được m. Kết hợp với điều kiện có nghiệm của (1) ta được giá trị m cần tìm.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Khi phương trình $x^2 - (m + 1)x + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, tìm một hệ thức giữa hai nghiệm độc lập đối với m.

Giải

Đặt $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1x_2$. Ta có:

$$\begin{cases} S = m+1 \\ P = 2m+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2S = -2m+2 \\ P = 2m+3 \end{cases}$$

$\Rightarrow P - 2S = 5 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 5$ (*).

Hệ thức (*) là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m cần xác định.

Ví dụ 2: Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + m + 3 = 0$ (1)

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$.

Giải

* (1) có hai nghiệm x_1, $x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta' = -4m+4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$ (*)

* Khi đó ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -2$ và $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m+3}{m-1}$.

* Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - \frac{m+3}{m-1} = 4 \Leftrightarrow 4m - 4 - m - 3 = 4m - 4 \Leftrightarrow m = -3.$$

So sánh điều kiện (*) ta được $m = -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Định m để phương trình $x^2 - (2m + 2)x + 16 = 0$ (I)

có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm đó bằng 6.

Giải

* (I) có hai nghiệm x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow (m + 5)(m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -5$ hay $m \geq 3$ (*).

* Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 2$ (1) và $x_1x_2 = 16$ (2).

* Ta có: $x_2 - x_1 = 6$ (3).

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_2 = m + 4$ và $x_1 = m - 2$.

Thế vào (2), ta được:

$(m + 4)(m - 2) = 16 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ hay $m = 4$.

So sánh với điều kiện (*) ta được: $m = -6$ hay $m = 4$.

3. Bài tập

1. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Tính giá trị của các biểu thức:

$A = x_1^2 + x_2^2$, $B = x_1^3 + x_2^3$, $C = x_1^4 + x_2^4$,

$D = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$, $E = (x_1 - 2)(x_2 - 2)$, $F = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

2. Cho hai số a, b thỏa mãn $a > b > 0$. Không giải phương trình

$$abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$$

hãy tính tỉ số giữa tổng hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ của phương trình đó.

3. Xác định m để các phương trình sau có hai nghiệm x_1, x_2 và tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m:

a) $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 4 = 0$ b) $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$

c) $(m - 1)x^2 - (2m + 5)x + m - 3 = 0$.

4. Tìm giá trị của a sao cho phương trình $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ có hai nghiệm, trong đó có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

5. Xác định m để phương trình $x^2 - (3m + 2)x + m^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức $x_1 = 9x_2$ và tính các nghiệm đó.

6. Xác định m để phương trình $8x^2 - 30x + m = 0$ có hai nghiệm trong đó có một nghiệm là bình phương của nghiệm kia.

7. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$. Hãy tìm tất cả các giá trị của m để có đẳng thức: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 7$.

8. Tìm tất cả các giá trị của a để hiệu hai nghiệm của phương trình sau bằng 1:

$2x^2 - 2(2a + 1)x + a + 3 = 0$.

9. Tìm tất cả các giá trị của k để phương trình bậc hai $(k + 2)x^2 - 2kx - k = 0$ có hai nghiệm mà khi biểu diễn trên trục số, chúng đối xứng qua điểm $x = \dfrac{1}{2}$.

10. Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2m + 2 = 0$ (1). Xác định m để:

a) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó chứng minh rằng

$4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) + 5$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 15$.

c) Phương trình (1) có một nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 > 4$.

Vấn đề 6: **Ứng dụng của định lí Vi-ét để thiết lập một phương trình có hai nghiệm cho trước**

1. Phương pháp

Để thiết lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là hai số α và β, ta tính:

$S = \alpha + \beta$ và $P = \alpha.\beta$.

Khi đó α, β lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện có nghiệm là $S^2 - 4P \geq 0$.

2. Ví dụ

Cho phương trình $x^2 - 4x - 7 = 0$ (1) có hai nghiệm là x_1; x_2.

Hãy tìm phương trình bậc hai có hai nghiệm là y_1; y_2 sao cho:

$y_1 = x_1 + x_2 - 6$; $y_2 = 2x_1x_2 + 5$.

Giải

Ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = -7$.

Suy ra: $y_1 = -2$; $y_2 = -9 \Rightarrow y_1 + y_2 = -11$ và $y_1y_2 = 18$.

Do đó y_1; y_2 là hai nghiệm của phương trình $y^2 + 11y + 18 = 0$.

Vậy phương trình $y^2 + 11y + 18 = 0$ là phương trình cần tìm.

3. Bài tập

1. Tìm phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{1}{m-1} \text{ và } x_2 = \frac{1}{m+1} \quad (m \neq \pm 1)$$

2. Tìm phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1 + x_2 - 2m = 0 \\ x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + 2 = 0 \end{cases} \quad (m \neq -1).$$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai là những phương trình mà khi giải nó ta biến đổi nó về các phương trình bậc nhất hoặc bậc hai bằng cách biến đổi tương đương, bằng cách đặt ẩn phụ... Các phương trình thường được quy về bậc nhất hoặc bậc hai là các phương trình chứa trị tuyệt đối, phương trình chứa ẩn ở mẫu số, phương trình chứa căn,...

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối**

1. Phương pháp

a. Các dạng cơ bản:

Dạng 1: $|A| = |B|$

Cách 1: $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$.

Cách 2: $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2$.

Dạng 2: $|A| = B$

Cách 1: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$ (Dùng khi A phức tạp hơn B)

Cách 2: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A \leq 0 \\ -A = B \end{cases}$ (Dùng khi B phức tạp hơn A)

Cách 3: Bình phương hai vế, giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

b. Các dạng còn lại:

Ta phải xét dấu các biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối; phân chia các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối để giải.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: a) Giải phương trình $|x^2 - 2x - 3| = x - 3$.

b) Giải và biện luận phương trình $|2x - 3m| = x - 3$.

Giải

a) Ta có: $|x^2 - 2x - 3| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 = -x + 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ hay } x = 3 \\ x = 3 \text{ hay } x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 3.

b) Phương trình $|2x - 3m| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 3m = x - 3 \\ 2x - 3m = -x + 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3m - 3 = x_1 \\ x = m + 1 = x_2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ta có: $x_1 \geq 3 \Leftrightarrow 3m - 3 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 2$.

$x_2 \geq 3 \Leftrightarrow m + 1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 2$.

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 3m - 3 = m + 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Kết luận: * $m < 2$: Phương trình vô nghiệm

* $m = 2$: Phương trình có một nghiệm $x = 4$.

* $m > 2$: Phương trình có hai nghiệm $x = 3m - 3$ và $x = m + 1$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$3|x| + mx - 2m + 2 = 0 \ (*)$$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow (I) \begin{cases} x < 0 \\ (m-3)x = 2m - 2 \ (1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \geq 0 \\ (m+3)x = 2m - 2 \ (2) \end{cases}$

➢ Giải (1) với $x < 0$:

* $m = 3$: (1) vô nghiệm.

* $m \neq 3$: (1) có nghiệm $x = \dfrac{2m-2}{m-3}$.

Phải có: $\dfrac{2m-2}{m-3} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Tóm lại: $1 < m < 3 \Leftrightarrow$ (I) có nghiệm $x_1 = \dfrac{2m-2}{m-3}$.

➢ Giải (2) với $x \geqslant 0$:

* $m = -3$: (2) vô nghiệm

* $m \neq -3$: (2) có nghiệm $x_2 = \dfrac{2m-2}{m+3}$.

Phải có: $\dfrac{2m-2}{m+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m \geq 1$.

Tóm lại: $m < -3$ hoặc $m \geqslant 1 \Leftrightarrow$ (II) có nghiệm $x_2 = \dfrac{2m-2}{m+3}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có:

* $m < -3$: (*) có một nghiệm là $x = x_2$.

* $-3 \leqslant m < 1$: (*) vô nghiệm.

* $m = 1$: (*) có một nghiệm là $x = x_2 = 0$.

* $1 < m < 3$: (*) có hai nghiệm là $x = x_1$; $x = x_2$

* $m \geqslant 3$: (*) có một nghiệm $x = x_2$.

3. bài tập

1. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-x+5}{|x+1|}$

b) $|2x+5| = x^2 + 5x + 1$.

2. Giải và biện luận các phương trình:

a) $|2mx-3| = |4x-m-1|$

b) $|mx-x| = |mx-x+2m-2|$

c) $|mx-1| = 2x-2$

d) $|3x+2m| = 2x-2m$

3. Giải các phương trình sau đây bằng cách đặt ẩn số phụ:

a) $\dfrac{x^2-4x+4}{4x^2-4x+1} + \dfrac{|2x-4|}{|2x-1|} = 3$

b) $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| - 3\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right| = 2$

c) $x^2 + 4x - 3|x+2| - 10 = 0$

d) $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 6 = 0$.

4. Định m để phương trình có nghiệm duy nhất:

a) $|mx-2| = |x+4|$

b) $|mx+x-2| = |2x-2|$.

5. Giải phương trình:

a) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$ b) $|2x^2-|x-1||=3x+1$.

6. Định m để phương trình:

a) $x^2-2x-2m|x-1|+2m-3=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

b) $|x^2+2mx+1|=x+1$ có nghiệm duy nhất.

Vấn đề 2: Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

1. Phương pháp

- Đặt điều kiện cho các mẫu thức khác 0.
- Quy đồng mẫu số đưa về phương trình không có ẩn ở mẫu.
- Giải phương trình không có ẩn ở mẫu.
- So sánh nghiệm tìm được với điều kiện, chọn nghiệm và kết luận.

2. Ví dụ

Giải và biện luận phương trình: $\frac{x-m}{x-2}+\frac{x-2}{x}=2$ (1)

Giải

- Điều kiện: $x\neq 0$ và $x\neq 2$
- Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2-mx+(x-2)^2=2x(x-2)\Leftrightarrow mx=4$ (2)

  * $m=0$: Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

  * $m\neq 0$: (2) $\Leftrightarrow x=\frac{4}{m}$.

Để giá trị này được nhận là nghiệm của phương trình (1), nó phải thỏa điều kiện:

$\frac{4}{m}\neq 0$ và $\frac{4}{m}\neq 2\Leftrightarrow m\neq 2$.

Kết luận: + $m=0$ hay $m=2$: Phương trình (1) vô nghiệm

+ $m\neq 0$ và $m\neq 2$: Phương trình có một nghiệm $x=\frac{4}{m}$.

3. Bài tập

1. Giải phương trình

a) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$ b) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$.

c) $\frac{x+4}{x}+\frac{6x}{x+4}=5$

2. Giải và biện luận các phương trình:

a) $\frac{(m^2+1)x-10}{x-2}=m+1$ (1)

b) $\dfrac{(m^2+3)x-3}{x-1}=2m+3$ (2)

c) $\dfrac{m^2x-m^2}{x-1}=m$ (3)

d) $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-m}=2$ (4)

3. Định m để các phương trình sau vô nghiệm:

a) $\dfrac{m(x+1)}{x-1}=2$ b) $\dfrac{x-m}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}=2$.

c) $\dfrac{x+1}{x-m+1}=\dfrac{x}{x+m+2}$.

4. Định m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $x\sqrt{x+1}-\dfrac{x^2+x+2m}{\sqrt{x+1}}=m\sqrt{x+1}$ b) $\dfrac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}$

5. Định m để phương trình có nghiệm duy nhất:

a) $\dfrac{x+2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}$ b) $\dfrac{m}{mx+3}=2$

Vấn đề 3: Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

1. Phương pháp

Để giải phương trình chứa căn, đường lối chung là phải khử căn để đưa về những phương trình không chứa căn.

a. Các dạng cơ bản:

Dạng 1: $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\geqslant 0\ (hay\ B\geqslant 0)\\A=B\end{cases}$.

(Chọn $B\geq 0$ nếu B là biểu thức đơn giản hơn A)

Dạng 2: $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geqslant 0\\A=B^2\end{cases}$.

b. Các trường hợp còn lại:

Trong một số trường hợp, tùy theo từng phương trình ta thường dùng các phương pháp sau để giải:

* Đặt ẩn số phụ t, đưa về phương trình đơn giản theo ẩn t.
* Đặt ẩn số phụ t, đưa về phương trình chứa hai ẩn t và x.
* Đặt hai ẩn số phụ u và v, đưa về hệ phương trình hai ẩn u, v.
* Đưa về phương trình tích.
* Nhân liên hợp.
* Đánh giá hai vế.
* Bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa dấu căn. Tìm nghiệm của phương trình hệ quả rồi thử lại.

.....

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình

a) $\sqrt{2x^2-1}=x+1$ (1)

b) $x+\sqrt{x^2+9}=\sqrt{x^2+65}$ (2)

c) $\sqrt{x^2-x+7}+\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2-2x+21}$ (3)

d) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$ (4)

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\2x^2-1=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$.

b) $(2)\Rightarrow x^2+2x\sqrt{x^2+9}+x^2+9=x^2+65$

$\Rightarrow 2x\sqrt{x^2+9}=-x^2+56$

$\Rightarrow 4x^2(x^2+9)=x^4-112x^2+56^2$

$\Rightarrow 3x^4+148x^2-3136=0$

$\Rightarrow x^2=16$ hoặc $x^2=-\dfrac{196}{3}$ (loại)

$\Rightarrow x=\pm 4$.

Thử lại: Thay $x=\pm 4$ vào phương trình (2), ta chỉ nhận nghiệm $x=4$.

Vậy phương trình (2) có một nghiệm là $x=4$.

c) Đặt $t=x^2-x+1$, phương trình (3) trở thành:

$$\sqrt{t+6}+\sqrt{t+1}=\sqrt{2t+19}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\2t+7+2\sqrt{(t+6)(t+1)}=2t+19\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\\sqrt{(t+6)(t+1)}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\t^2+7t-30=0\end{cases}\Leftrightarrow t=3.$$

Với $t=3$ ta có $x^2-x+1=3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-1$.

d) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$ (4)

$(4)\Leftrightarrow (x+1)^3=3\sqrt[3]{3x+5}+2$.

Đặt $\sqrt[3]{3x+5}=y+1$.

$$(4)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^3=3y+5\\(y+1)^3=3x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^3-(y+1)^3=3(y-x)\\(x+1)^3=3y+5\end{cases}\quad(4a)$$

$(4a)\Leftrightarrow (x-y)[(x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2+3]=0\Leftrightarrow x-y$.

Do đó ta được: $(x+1)^3=3x+5\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4)\Leftrightarrow x=1$ hay $x=-2$.

Vậy (4) có hai nghiệm là $x=1$ hay $x=-2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+16} = 2x^2+2x+31$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $(4x-1)\sqrt{x^2+16} = 2(x^2+16)+2x-1$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+16}$ $(t \geq 4)$.

Ta đưa phương trình (1) thành phương trình bậc hai ẩn t, còn x là tham số sau:

$2t^2-(4x-1)t+2x-1=0$ (2)

$\Delta = 6x^2-24x+9 = (4x-3)^2$

(2) $\Leftrightarrow$ $t = \frac{1}{2}$ (loại) hoặc $t = 2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16} = 2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+16 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$ (1).

Giải

Điều kiện: $x \leq -1$ hay $x \geq -\frac{1}{4}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(4x^2+5x+1)-(4x^2-4x+4)}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}} - (9x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}} - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ \sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1} = 1 \ (2) \end{array}\right.$$

VT (2) $\geq \sqrt{4x^2-4x+4} = \sqrt{(2x-1)^2+3} \geq \sqrt{3} > 1$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{3}$.

3. Bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{2x^2-5x-5} = \sqrt{x^2-9}$

b) $\sqrt{6x+4}-\sqrt{x-2} = 4$

c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+10} = \sqrt{2x-2}-\sqrt{3x+7}$

d) $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$.

2. Giải các phương trình:

a) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$.

b) $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

c) $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

d) $\sqrt{x^2 + 5} = x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

3. Giải các phương trình:

a) $x\sqrt{1 - x} + 2(1 - x) = x^2$ b) $4x^2 + 12x\sqrt{x + 1} = 27(1 + x)$.

4. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 4} = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}$.

b) $\sqrt{22 - 3x} + 4\sqrt{x + 2} = x^2 + 8$

5. Định m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

a) $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$ b) $\sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x - 3}$.

Vấn đề 4: Một số phương trình bậc bốn đưa về phương trình bậc hai.

1. Phương pháp

a. Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Đặt $t = x^2$ $(t \geqslant 0)$

b. Phương trình dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$. Đặt $t = x + \dfrac{a + b}{2}$

c. Phương trình dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k = 0$ (1)

trong đó $k \neq 0$ và $a + b = c + d$.

(1) $\Leftrightarrow$ $[x^2 + (a + b)x + ab][x^2 + (c + d)x + cd] + k = 0$.

Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab$. Ta được (1) trở thành $t(t + cd - ab) + k = 0$.

d. Phương trình dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$ $(a \neq 0)$.

Vì $x = 0$ không thỏa phương trình $\Rightarrow x \neq 0$.

Chia 2 vế cho x^2, (1) $\Leftrightarrow$ $a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$. Đặt $t = x \pm \dfrac{1}{x}$.

2. Ví dụ

Giải các phương trình sau:

a) $(x - 6)^4 + (x - 8)^4 = 16$

b) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 9$

c) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

Giải

a) Đặt $t = x - 7$. Phương trình trở thành: $(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 16$.

Khai triển lũy thừa 4 và thu gọn ta được phương trình:

$t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Leftrightarrow x = 6$ hoặc $x = 8$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)] = 9$

$\Leftrightarrow (x^2+8x+7)(x^2+8x+15) = 9.$

Đặt $t = x^2 + 8x + 7$.

Phương trình trở thành $t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -9$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{10}$.

Với $t = -9 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

c) Vì $x = 0$ không thỏa phương trình nên $x \neq 0$.

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 4(x + \frac{1}{x}) + 5 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Với $t = 3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $(x - \sqrt{2})^4 - 3(x - \sqrt{2})^2 - 4 = 0$

b) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120$

2. Giải các phương trình:

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

b) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

c) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

d) $x^2(x-1)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0.$

3. Giải các phương trình:

a) $(x+3)^4 + (x-1)^4 = 256$

b) $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 82.$

4. Giải các phương trình:

a) $(x+1)(x-2)(x-5)(x-8) = 280$

b) $(x^2-4)(x+1)(x+5) - 160 = 0$

c) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 4x - 5) - 112 = 0$

d) $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6) + 96 = 0$

5. Giải các phương trình:

a) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

b) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$

6. Giải các phương trình:

a) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$

b) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

§4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Định nghĩa:

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng

$$ax + by = c \ (1)$$

trong đó x, y là hai ẩn; a, b, c là ba số cho trước với a và b không đồng thời bằng 0.

2. Nghiệm của phương trình:

Nghiệm của phương trình (1) là cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$.

3. Biểu diễn hình học tập nghiệm:

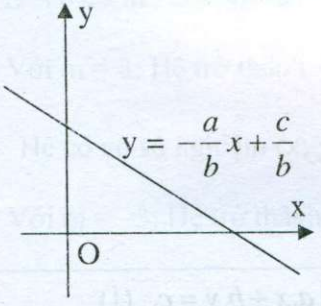
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập nghiệm của phương trình ax + by = c là một đường thẳng.

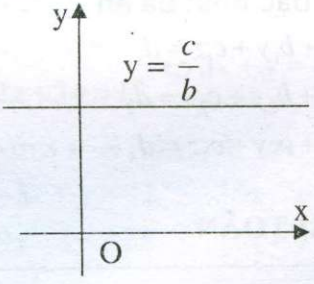
Gọi M(x;y) là điểm có tọa độ là cặp nghiệm của phương trình ax + by = c (1).

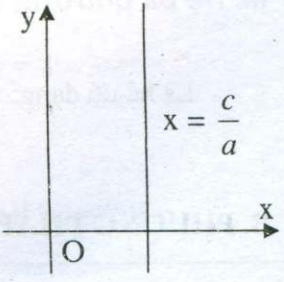
* Với $b \neq 0$, $(1) \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$: Tập hợp điểm M là đường thẳng $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

* Với $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$, $(1) \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$: Tập hợp điểm M là đường thẳng song song với trục tung, cắt trục hoành tại điểm $\frac{c}{a}$.

* Với $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$, $(1) \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$: Tập hợp điểm M là đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm $\frac{c}{b}$.







II. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ phương trình có dạng

$$(I) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ (2) \end{cases} \text{ với } a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \text{ và } a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

Cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời thỏa cả hai phương trình (1) và (2) được gọi là một nghiệm của hệ.

2. Công thức nghiệm:

Quy tắc Crame: Đặt

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;\ D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Khi đó:

- $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất là: $x = \dfrac{D_x}{D}$; $y = \dfrac{D_y}{D}$.
- $D = 0$:
  * $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
  * $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ thỏa $a_1x + b_1y = c_1$.

3. Biểu diễn hình học của tập nghiệm.

Nghiệm $(x; y)$ của hệ (I) là tọa độ của giao điểm M$(x; y)$ hai đường thẳng (d_1): $a_1x + b_1y = c_1$ và (d_2): $a_2x + b_2y = c_2$

* Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) cắt nhau.
* Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) song song với nhau.
* Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ (d_1) và (d_2) trùng nhau.

Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ thì ta có:

* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.
* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Hệ vô nghiệm.
* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Hệ có vô số nghiệm.

III. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Là hệ có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Giải và biện luận hệ phương trình hai ẩn** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad (2) \end{cases}$

1. Phương pháp

Bước 1: Tính các định thức $D = a_1b_2 - a_2b_1$; $D_x = c_1b_2 - c_2b_1$; $D_y = a_1c_2 - a_2c_1$ theo tham số và phân tích chúng thành tích số.

Bước 2: Xác định giá trị tham số trong các trường hợp $D \neq 0$, $D = 0$ và kết luận về nghiệm của hệ.

Chú ý: Trong một số trường hợp, ta có thể đặt ẩn số phụ để đưa hệ về hệ phương trình bậc nhất theo hai ẩn phụ.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ 9x + my = 12 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Ta có các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 9 & m \end{vmatrix} = m^2 - 9 = (m + 3)(m - 3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 12 & m \end{vmatrix} = m(m + 1) - 12 = m^2 + m - 12 = (m - 3)(m + 4).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 12m - 9(m + 1) = 3m - 9 = 3(m - 3).$$

Biện luận:

* $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$: Hệ có nghiệm duy nhất (x;y) với

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-3)(m+4)}{(m-3)(m+3)} = \frac{m+4}{m+3}.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{3(m-3)}{(m-3)(m+3)} = \frac{3}{m+3}.$$

* $D = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$:

+ Với $m = 3$: Hệ trở thành $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 12x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - 3x$:

Hệ có vô số nghiệm (x; y) với $x \in \mathbb{R}$ và $y = 4 - 3x$.

+ Với $m = -3$: Hệ trở thành $\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 9x - 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$: Hệ vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1} - \dfrac{2y}{x+1} = 14 \\ \dfrac{4x-2}{y-1} - \dfrac{4y}{x+1} = 8 \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = \dfrac{2x-1}{y-1}$ và $v = \dfrac{y}{x+1}$.

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 3u-2v=14 \\ 2u-4v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta được hệ $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{y-1}=5 \\ \dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=-4 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (3; 2).

Ví dụ 3: Định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (m^2-1)x+(m^2+m-2)y=m^2+2m-3 \\ (m-1)x+(m-1)y=m-1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m^2-1 & m^2+m-2 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix} = (m^2-1)(m-1)-(m^2+m-2)(m-1)$$

$$= (m-1)^2[(m+1)-(m+2)] = -(m-1)^2.$$

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Ví dụ 4: Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} m(m-1)x+m(m+1)y=m^3+2 \\ (m^2-1)x+(m^3+1)y=m^4-1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Cách 1: Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m(m-1) & m(m+1) \\ m^2-1 & m^3+1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m^3+1)-m(m+1)(m^2-1)$$

$$= m(m-1)(m+1)[m^2-m+1-m-1] = m^2(m^2-1)(m-2).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^3+2 & m(m+1) \\ m^4-1 & m^3+1 \end{vmatrix} = (m^3+2)(m^3+1)-m(m+1)(m^4-1)$$

$$= -m^5+3m^3+m^2+m+2.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m(m-1) & m^3+2 \\ m^2-1 & m^4-1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m^4-1)-(m^3+2)(m^2-1)$$

$$= m^6-2m^5+m^3-3m^2+m+2.$$

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \vee m = 2 \vee m = \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} -m^5 + 3m^3 + m^2 + m + 2 \neq 0 \\ m^6 - 2m^5 + m^3 - 3m^2 + m + 2 \neq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in \{0; -1; 1\}$.

Cách 2: Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m(m-1) & m(m+1) \\ m^2 - 1 & m^3 + 1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m^3+1) - m(m+1)(m^2-1)$$

$$= m(m-1)(m+1)[m^2 - m + 1 - m - 1] = m^2(m^2-1)(m-2).$$

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$ hoặc $m = \pm 1$.

Thử lại:

* $m = 0$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow m = 0$ (nhận).

* $m = 2$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\Rightarrow m = 2$ (loại)

* $m = 1$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 2y = 3 \\ 0x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow m = 1$ (nhận)

* $m = -1$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ (nhận).

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m \in \{0; -1; 1\}$.

Ví dụ 5: Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} m|x| + (m-1)(y-2) = m-1 \\ (m+3)|x| + 2(y-2) = 2m-4 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

Nhận xét: Nếu hệ (1) có nghiệm (x; y) thì (–x; y) cũng là nghiệm của hệ (1).

Do đó: Nếu (1) có nghiệm duy nhất (x; y) thì $x = 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(y-2) = m-1 \\ 2(y-2) = 2m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2) = m-1 \\ y - 2 = m - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1$ hoặc $m = 3$.

Thử lại:

- m = 1: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ 4|x| + 2(y-2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ m = 1 (nhận)

- m = 3: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 2(y-2) = 2 \\ 4|x| + 2(y-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ m = 3 (nhận).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = 1 hoặc m = 3.

Ví dụ 6: Định m nguyên để hệ sau có nghiệm (x; y) với x, y nguyên:

$$\begin{cases} mx - 2y = m - 2 \\ (m-1)^2 x - y = m^2 - 1 \end{cases} (*)$$

Giải

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & -2 \\ (m-1)^2 & -1 \end{vmatrix} = -m + 2(m-1)^2 = 2m^2 - 5m + 2 = (m-2)(2m-1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-2 & -2 \\ m^2-1 & -1 \end{vmatrix} = -m + 2 + 2m^2 - 2 = m(2m-1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m-2 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix} = m(m^2-1) - (m-1)^2(m-2) = 2(m-1)(2m-1).$$

Ta có:

- $D = 0 \Leftrightarrow$ m = 2 hoặc $m = \frac{1}{2}$:

  * m = 2: $D_x \neq 0 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

  * $m = \frac{1}{2}$ không là số nguyên.

- $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m}{m-2} = 1 + \dfrac{2}{m-2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2m-2}{m-2} = 2 + \dfrac{2}{m-2} \end{cases}$$

Do đó m, x, y nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{2}{m-2}$ nguyên

$\Leftrightarrow$ m − 2 ∈ {± 1; ± 2} $\Leftrightarrow$ m ∈ {3; 1; 4; 0}.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow$ m ∈ {3; 1; 4; 0}.

Ví dụ 7: Một tàu thủy xuôi dòng từ A đến B mất 5 giờ và ngược dòng từ B về A mất 7 giờ. Hỏi một chiếc bè trôi từ A đến B mất bao lâu ?

Giải

Gọi x là vận tốc thực của tàu thủy và y là vận tốc của dòng nước.

Ta có: Khi xuôi dòng, một giờ tàu thủy đi được $x + y = \frac{1}{5}$ (quãng đường)

Khi ngược dòng, một giờ tàu thủy đi được $x - y = \frac{1}{7}$ (quãng đường)

$\Rightarrow y = \frac{1}{35}$.

Ta có vận tốc của bè bằng vận tốc của dòng nước nên một giờ chiếc bè trôi được $\frac{1}{35}$ (quãng đường) $\Rightarrow$ Bè trôi từ A đến B mất 35 giờ.

3. Bài tập

1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{5}x + y = 6 \\ x - \sqrt{5}y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x + \frac{5}{2}y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = \frac{3}{4} \end{cases}$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 2x - \sqrt{y-1} = 3 \\ x^2 + x + 2\sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3x-6}{y+1} - \frac{x}{y-2} = 1 \\ \frac{x-2}{y+1} + \frac{3x}{y-2} = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-3}{x-2} + \frac{y+7}{y+3} = 5 \\ \frac{x+1}{x-2} + \frac{3y+1}{y+3} = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3(x+y) + 2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = 6 \\ 3(x-y) + 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 4 \end{cases}$

3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax - y = b \\ bx + y = a \end{cases}$.

4. Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

a) $\begin{cases} ax+y=3 \\ x+ay=3a^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m-2)x-y=m+2 \\ (m+1)x+2y=m-5 \end{cases}$.

5. Định m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} mx+2y=m \\ (m-1)x+(m-1)y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-my=1 \\ -mx+3y=m-4 \end{cases}$.

6. Định m để hệ có nghiệm duy nhất và tính nghiệm đó:

a) $\begin{cases} (m+5)x+(2m+3)y=3m+2 \\ (3m+10)x+(5m+6)y=2m+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx^2-2y=m \\ x^2+(m-3)y=m-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=m \\ |mx-my|=|m-1| \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+my=1 \\ |mx+y|=2m \end{cases}$.

7. Với giá trị nào của a, b thì hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

a) $\begin{cases} a^2x-by=a^2-b \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$ b) $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2 \\ (a+b)x+(a-b)y=a+1 \end{cases}$.

8. Xác định a, b, c để hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax-by=2a-b \\ (c+1)x+cy=13-a+2b \end{cases} \quad (1)$$

có vô số nghiệm, đồng thời x = 1, y = 3 là một trong các nghiệm đó.

9. Định m nguyên để hệ phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} mx+2y=m \\ (m-1)x+(m-1)y=1 \end{cases}.$$

10. Tìm b để hệ phương trình sau có nghiệm với $\forall$ a: $\begin{cases} ax+y=3b \\ x+ay=b^2+b \end{cases}$.

11. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2mx-(m+1)y=1-3m \\ (m-2)x+my=3m-2 \end{cases}$ (I)

a) Giải hệ khi m = 3.

b) Tìm m để hệ đã cho có một nghiệm duy nhất (x, y). Khi đó hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc m.

12. Tính tuổi của hai cha con hiện nay, biết rằng trước đây 2 năm thì tuổi cha gấp 7 lần tuổi con và sau 3 năm nữa thì tuổi cha chỉ còn gấp 4 lần tuổi con.

13. Xếp 90kg sản phẩm vào 25 hộp thì vừa đủ. Có hai loại hộp: loại chứa 3kg và loại chứa 4kg. Hỏi mỗi loại có mấy hộp ?

Vấn đề 2: **Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn**

1. Phương pháp

Để giải hệ phương trình nhiều ẩn ta thường tìm cách **khử bớt ẩn số,** đưa về hệ phương trình **có số ẩn ít hơn**, từ đó ta dễ dàng tính được nghiệm của hệ. Muốn khử bớt ẩn, ta có thể dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.

2. Ví dụ: Định m để hệ có nghiệm duy nhất và tính nghiệm duy nhất đó:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 & (1) \\ 3x+4y+2z=m+1 & (2) \\ 2x+3y-z=1 & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ (3) suy ra z = 2x + 3y – 1. Thế vào hai phương trình (1) và (2), ta được

$$\begin{cases} x+y+(m+1)(2x+3y-1)=2 \\ 3x+4y+2(2x+3y-1)=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)x+(3m+4)y=m+3 \\ 7x+10y=m+3 \end{cases}$$

Ta có $D = \begin{vmatrix} 2m+3 & 3m+4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 2 - m;$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+3 & 3m+4 \\ m+3 & 10 \end{vmatrix} = 3(m+3)(2-m);$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m+3 & m+3 \\ 7 & m+3 \end{vmatrix} = -2(m+3)(2-m).$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ là:

$$x = \frac{D_x}{D} = 3m+9 \; ; \; y = \frac{D_y}{D} = -2m-6 \text{ và } z = -1.$$

3. Bài tập

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x-2y+z=9 \\ -2x+3y-2z=-3 \\ 4x+3y+z=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y+2z=-2 \\ -2x+5y+z=5 \\ 3x-7y+4z=8 \end{cases}$

2. Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+mz=3. \\ x+my+3z=2 \end{cases}$

3. Xác định điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b. \\ x-5y+8z=c \end{cases}$

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HAI ẨN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Đa thức bậc hai đối với hai biến x và y là biểu thức có dạng:

$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$

trong đó a, b và c không đồng thời bằng không.

2. Đa thức f(x, y) được gọi là *đối xứng* đối với x và y nếu nó không thay đổi khi ta đổi chỗ x và y cho nhau, nghĩa là f(x, y) = f(y, x).

Ví dụ: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 5x + 5y - 1.$

3. Hệ phương trình bậc hai với hai ẩn x và y là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \ (1) \\ g(x,y) = 0 \ (2) \end{cases} \quad (I)$$

trong đó ít nhất một trong hai đa thức f(x, y) hoặc g(x, y) là bậc 2 đối với x và y.

4. Hệ (I) được gọi là *hệ đối xứng* đối với x và y nếu khi thay thế x bởi y và y bởi x thì hệ phương trình không thay đổi.

Ta có hai trường hợp:

– Nếu khi thay thế x bởi y và y bởi x mà mỗi phương trình của hệ (I) không thay đổi thì hệ (I) gọi là hệ đối xứng loại 1.

Ví dụ: $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2y + xy^2 = 3 \end{cases}$

- Nếu khi thay thế x bởi y và y bởi x mà phương trình này của hệ (I) biến thành phương trình kia của hệ thì hệ (I) gọi là hệ đối xứng loại 2.

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 = 2x + 3y + 1 \\ y^2 = 2y + 3x + 1 \end{cases}.$

Chú ý:

Với hệ đối xứng ta có nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì (y; x) cũng là nghiệm của hệ.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai

1. Phương pháp

Ta dùng phương pháp thế:

– Từ phương trình bậc nhất ta biểu diễn ẩn này theo ẩn kia.

– Thế vào phương trình còn lại, ta được phương trình một ẩn và tính được giá trị ẩn đó.

– Suy ra giá trị ẩn còn lại. Từ đó ta được nghiệm của hệ.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 37 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (1) suy ra $y = x - 3$.

Thế vào (2) ta được:

$$x^2 + (x-3)^2 - x(x-3) = 37 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 7 \end{array}\right.$$

Khi $x = -4$ thì $y = -7$;

Khi $x = 7$ thì $y = 4$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Từ (1) $\Rightarrow y = m - x$. Thay vào (2) ta được:

$x^2 - (m-x)^2 + 2x = 2$

$\Leftrightarrow 2mx - m^2 + 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2m+2)x = m^2 + 2$ (3)

Ta có:

* $m = -1$: (3) $\Leftrightarrow 0.x = 3$ (vô nghiệm). Vậy hệ (I) vô nghiệm.

* $m \neq -1$: (3) có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{m^2+2}{2m+2} \Rightarrow y = \dfrac{m^2+2m-2}{2m+2}$.

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{m^2+2}{2m+2}; \dfrac{m^2+2m-2}{2m+2}\right)$.

Kết luận: * $m = -1$: Hệ (I) vô nghiệm.

* $m \neq -1$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{m^2+2}{2m+2}; \dfrac{m^2+2m-2}{2m+2}\right)$.

3. Bài tập

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + 11 = 5y^2 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 6xy + 42x - 40y + 135 = 0 \\ 3x - 2y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x^2 + 9y^2 - 12xy + 5x + 3y + 5 = 0 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1} - \dfrac{x-y}{2y} = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{1}{4y^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

3. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(x+y)^4+4(x+y)^2-117=0\\x-y=25\end{cases}$

b) $\begin{cases}(18x^2+18x+18y-306)(12x^2-12xy-336)=0\\3x+4y=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-y=1\\x^3-y^3=7\end{cases}$

d) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45\\x+y=5\end{cases}$

4. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(x+a)^2+2(y-a)^2-(x+a)(y-a)=24\\x+y=2\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x+m)^2-y^2+y(x+m)=11\\x+2y=7-m\end{cases}$

c) $\begin{cases}2(x-m)^2+(y+2m)^2+x=m+2\\x+3y=2-5m\end{cases}$

5. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1 & (1)\\x^3-y^3=m(x-y) & (2)\end{cases}$ (I)

a) Giải hệ khi m = 1.

b) Định m để hệ có 3 nghiệm phân biệt.

Vấn đề 2: Giải hệ đối xứng loại I

1. Phương pháp

Cho hệ đối xứng loại I: $\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$ (I)

– Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện để tồn tại x, y là $S^2 - 4P \geqslant 0$.

Biến đổi hệ (I) thành hệ theo S và P: $\begin{cases}F(S,P)=0\\G(S,P)=0\end{cases}$ (II)

– Giải hệ (II) để tính S và P.

– Với mỗi cặp nghiệm $(S_0; P_0)$ của (II) thì x, y là nghiệm của phương trình

$X^2 - S_0X + P_0 = 0$.

Chú ý: Tính chất nghiệm của hệ đối xứng.

* Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.

* Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0) = (y_0; x_0)$, suy ra $x_0 = y_0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ (I)

Giải

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

(I) trở thành $\begin{cases} S + P = 11 \\ SP = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$.

- Với S = 6 và P = 5, ta có x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình
  $X^2 - 6X + 5 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ hoặc $X = 5$.

Suy ra hệ có nghiệm là (1; 5) và (5; 1).

- Với S = 5 và P = 6, ta có x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình
  $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ hoặc $X = 3$.

Suy ra hệ có nghiệm là (2; 3) và (3; 2).

Vậy hệ (I) có 4 nghiệm là (1; 5), (5; 1), (2; 3), (3; 2).

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$ (*)

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2 + y^2) = 13xy \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Đặt S = x + y và P = xy, hệ (*) trở thành: $\begin{cases} 6(S^2 - 2P) = 13P \\ S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow S = 5$ và $P = 6$

Suy ra x và y lần lượt là hai nghiệm của phương trình
$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ hoặc $X = 3$.

Vậy hệ (*) có hai nghiệm (2; 3) hoặc (3; 2).

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{(x+2y)^2}{9} + \dfrac{9}{(2x-y)^2} = 10 \\ \dfrac{x+2y}{2x-y} = 3 \end{cases}$ (1)

Giải

Đặt $u = \dfrac{x+2y}{3}$ và $v = \dfrac{3}{2x-y}$.

Hệ (1) trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 10 \\ uv = 3 \end{cases}$ (2)

Đặt S = u + v và P = uv.

Hệ (2) trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 16 \\ P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -4 \\ P = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}.$$

- Với S = –4, P = 3 thì u và v lần lượt là hai nghiệm của phương trình $U^2 + 4U + 3 = 0 \Leftrightarrow U = -1$ hoặc $U = -3$.

Do đó ta được:

$$\begin{cases} u = -1 \\ v = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} = -1 \\ \dfrac{3}{2x-y} = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} = -3 \\ \dfrac{3}{2x-y} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = -3 \\ 2x-y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+2y = -9 \\ 2x-y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1 \text{ hoặc } x = y = -3$$

- Với S = 4 và P = 3 thì u và v lần lượt là hai nghiệm của phương trình $U^2 - 4U + 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1, v = 3$ hoặc $u = 3$ hoặc $v = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} = 1 \\ \dfrac{3}{2x-y} = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} = 3 \\ \dfrac{3}{2x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3 \text{ hoặc } x = y = 1.$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là (1;1), (–1;–1), (3; 3) và (–3; –3).

Ví dụ 4: Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = m - 1 \end{cases} \quad (1).$$

Giải

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m \\ SP = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = m - 1 \\ S_1 = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} P_2 = 1 \\ S_2 = m - 1 \end{cases}$.

Do đó:

Hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} S_1^2 - 4P_1 < 0 \\ S_2^2 - 4P_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 - 4(m-1) < 0 \\ (m-1)^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{5}{4} \\ -1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 3.$$

Vậy hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{5}{4} < m < 3$.

3. Bài tập

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19 \\ 15xy+5(x+y)=-175 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+y+xy=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2=160 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{4x+y}+x=3 \\ \dfrac{x}{4x+y}=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2-xy)^2+(x+y)^2=100 \\ (x^2-xy)(x+y)-(x^2-xy+x+y)=34 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-2y)^2+(x+y)^2+(x-2y)(x+y)=13 \\ (x-2y)(x+y)(2x-y)=12 \end{cases}$

3. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$

4. Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2+xy=m \\ 2x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-y^2+mx=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ xy=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x+y=2 \end{cases}$

5. Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} x+y+2=2(x+1)(y+1) \\ x+y+xy=m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$

Vấn đề 3: Giải hệ đối xứng II

1. Phương pháp

Cho hệ phương trình đối xứng loại 2: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ (I)

– Trừ vế với vế của hai phương trình của hệ ta được phương trình có dạng $(x-y)h(x;y)=0 \Leftrightarrow x-y=0$ hoặc $h(x;y)=0$.

Do đó ta được:

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x,y)=0 \\ h(x,y)=0 \end{cases}.$$

Giải hai hệ này ta được nghiệm của hệ (I).

Chú ý: Nếu (x; y) là nghiệm của (I) thì (y; x) cũng là nghiệm của (I).

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y=2xy & (1) \\ y^2+x=2xy & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Trừ vế với vế của (1) cho (2) ta được:

$$x^2-y^2+y-x=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=x \\ y=1-x \end{bmatrix}.$$

Thay vào (1), ta được:

- $y=x$: $(1) \Leftrightarrow x^2+x=2x^2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{bmatrix}$.
- $y=1-x$: $(1) \Leftrightarrow x^2+1-x=2x(1-x) \Leftrightarrow 3x^2-3x+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy hệ (I) có hai nghiệm $x=y=0$ hoặc $x=y=1$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-3y=x^2-2 & (1) \\ 2x^2-3x=y^2-2 & (2) \end{cases}$ (II)

Giải

Lấy (1) – (2) ta được:

$$2(y^2-x^2)-3(y-x)=x^2-y^2 \Leftrightarrow (y-x)(3y+3x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=x \\ y=1-x \end{bmatrix}.$$

- Khi $y=x$ thì (1) trở thành:

  $2x^2-3x=x^2-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ hay $x=2$.
- Khi $y=1-x$ thì (1) trở thành:

  $2(1-x)^2-3(1-x)=x^2-2 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy hệ (II) có hai nghiệm là (1; 1), (2; 2).

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(x+y)=m & (1) \\ x^2-(x+y)=m & (2) \end{cases}$ (III)

a) Giải hệ khi m = 0.

b) Định m để hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

Giải

a) Khi m = 0 thì hệ trở thành: $\begin{cases} y^2-(x+y)=0 & (1) \\ x^2-(x+y)=0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) ta được: $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

➢ Với y = x thì (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay x = 2.

➢ Với y = – thì (1) $\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy khi m = 0 thì hệ (III) có nghiệm là (0; 0), (2; 2).

b) Nhận xét: Nếu hệ có nghiệm (x; y) thì (y; x) cũng là nghiệm của hệ.

Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất là (x; y) thì x = y.

Khi đó (1) trở thành $x^2 - 2x - m = 0$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ (3) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi m = –1 thì hệ trở thành: $\begin{cases} y^2-(x+y)=-1 & (3) \\ x^2-(x+y)=-1 & (4) \end{cases}$

Lấy (3) – (4) ta được: $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

* y = x: (3) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

* y = –x: (3) $\Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất là (1; 1).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = – 1.

3. Bài tập

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2+4y=x \\ y^2+4x=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3=4y \\ y^3=4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2=10x+5y \\ y^2=10y+5x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x=y^2-4y+5 \\ 2y=x^2-4x+5 \end{cases}$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-3y=4\dfrac{y}{x} \\ y-3x=4\dfrac{x}{y} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+\sqrt[4]{y-1}=1 \\ y+\sqrt[4]{x-1}=1 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x^3=8x+17y \\ y^3=8y+17x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2=6x-y^3 \\ y^2=6y-x^3 \end{cases}$. e) $\begin{cases} 3x^2=2y+\dfrac{1}{y} \\ 3y^2=2x+\dfrac{1}{x} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{3}{y^2} \\ 2y+x=\dfrac{3}{x^2} \end{cases}$.

3. Định m để hệ $\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}$. Định m để hệ có nghiệm duy nhất.

5. Xác định giá trị *âm* của m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + m = y^3 + xy \\ xy^2 + m^3 = x^3 + yx \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} \end{cases}$.

a) Giải hệ khi m = 9

b) Định m để hệ có nghiệm.

§6. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 3

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau và có nhận xét gì về tập nghiệm của phương trình đó:

a) $\frac{x^2-5x}{x-1} + \sqrt{x-1} = x^3 + \sqrt{1-x}$ b) $x^3 - \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9-x^2} + 27$

c) $\frac{2x-4}{\sqrt{x-2}} - x\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x^2}$ d) $x^2 + xy - 3y + 5 = x + \sqrt{-x^2-3y^2+2xy}$.

2. Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$ b) $|mx-1| = |3x+2-m|$

c) $\frac{mx-1}{x-2} = 3$ d) $\frac{m^2(x-4)+1}{x-4} = m$.

3. Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$ (1)

a) Giải và biện luận phương trình trên theo tham số m.

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 5$.

4. Xác định m để phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm đó bằng 1.

5. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hai hàm số $y = 2mx - 2$ (d) và $y = (m-6)x^2 + m$ (P) không giao nhau?

6. Giải và biện luận hệ $\begin{cases} (m+2)x + 3y = 6 \\ mx + (2m-1)y = m+1 \end{cases}$ (1).

7. Xác định giá trị của a để hệ vô nghiệm: $\begin{cases}(a-1)x-4y=a\\2x+(a+5)y=a+2\end{cases}$ (*).

8. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}x+y=2\\2x^2+y+xy=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+2y+1)(x+2y+2)=0\\xy+y^2+3y+1=0\end{cases}$

9. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}3(x+y)=xy\\x^2+y^2=160\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\x+xy+y=5\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}\\x+y=5\end{cases}$

10. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+2y)^2+\frac{1}{(2x-y)^2}=10\\\frac{x+2y}{2x-y}=3\end{cases}$

11. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}x^2+2y=xy+4\\y^2+2x=xy+4\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2=13x+4y\\y^2=13y+4x\end{cases}$

12. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}2x^2-y^2=7\\3y^2+xy-3x^2=-7\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+y^2=25-2xy\\y(x+y)=10\end{cases}$

c) $\begin{cases}2(x+y)^2+2(x-y)^2=5(x^2-y^2)\\x^2+y^2=40\end{cases}$

13. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=2a-1\\x^2+y^2=3a^2+2a-3\end{cases}$. Tìm a để tích x.y nhỏ nhất.

14. Cho $\begin{cases}x+y=a\\x^2+y^2=6-a^2\end{cases}$

a) Giải hệ khi a = 2.

b) Tìm GTNN của F = –xy + 2(x + y).

15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2-2xy=16\\x^2-3xy-2y^2=8\end{cases}$

16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+2x^2y=3\\x^2+y^2+y=3\end{cases}$

17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+2x)(3x+y)=24 \\ x^2+5x+y-11=0 \end{cases}$.

19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=2 \\ y+\sqrt{y}+\sqrt{y+4}=2 \end{cases}$

20. Giải phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Vấn đề 1: **Tìm điều kiện của phương trình**

1. a) Điều kiện của phương trình: $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy phương trình vô nghiệm. Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Thế $x = 3$ vào phương trình ta được $2.3 - 0 = 0 + 6$ là đẳng thức đúng.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

c) $\sqrt{x-5} = 3 - x$ (1)

Điều kiện: $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Ta có: Với $x \geq 5$ thì vế phải của (1) < 0; vế trái ≥ 0 nên (1) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \varnothing$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 2-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $3.2 - 0 = 0 + 6$ là đẳng thức đúng.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Do đó tập nghiệm là $S = \{2\}$.

e) Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \leq 0 \\ 4-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Vậy không có x nào thỏa điều kiện nên phương trình vô nghiệm. Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

f) Điều kiện: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ -x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Vậy không có x nào thỏa điều kiện nên phương trình vô nghiệm. Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

g) $x + \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9-x^2} - 3$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ 9-x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

Thay $x = 3$ vào phương trình ta được $3 + 0 = 0 - 3$ là đẳng thức sai.

Thay $x = -3$ vào phương trình ta được $-3 + 0 = 0 - 3$ là đẳng thức đúng.

Vậy $x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Do đó tập nghiệm là $S = \{-3\}$.

h) Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Với $x > 2$ thì vế trái của phương trình > 0 và vế phải của phương trình < 0.

Do đó phương trình vô nghiệm. Vậy $S = \varnothing$.

2. a) Điều kiện: $-x^2 - (y + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $y = -1$.

Thay $x = 0$ và $y = -1$ vào phương trình ta được: $0 + 0 = 1.0$ (đúng).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(0; -1)$.

Do đó tập nghiệm của phương trình là $S = \{(0; -1)\}$.

b) Điều kiện: $-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 - (y - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ và $y = 1$.

Thay $x = 3$ và $y = 1$ vào phương trình ta được:

$0 + 3 + 1 = 4 + 0$ là đẳng thức đúng. Vậy nghiệm của phương trình là $(3; 1)$.

Do đó tập nghiệm là $S = \{(3; 1)\}$.

***Vấn đề 2:* Giải phương trình bằng phép biến đổi tương đương**

1. a) $x+1+\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+5}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ (x+3)(x+1)+2 = x+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x^2+3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x = 0 \text{ hay } x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $S = \{0\}$.

b) $\dfrac{x^2-4x-4}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ x^2-4x-4 = x-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2-5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$. Vậy $S = \{5\}$.

c) $\sqrt{(x-1)(x^2-3)} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-1)(x^2-3) = x-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)(x^2-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \text{ hay } x = -2 \text{ hay } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 2.$

Vậy S = {1; 2}.

d) $x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = x$.

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Khi đó: $x^3 > x$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$ nên vế trái > vế phải. Vậy phương trình vô nghiệm.

2. a) Điều kiện: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Khi đó phương trình trở thành $x = 3$ (loại). Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Khi đó phương trình trở thành $x = 4$ (nhận). Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

c) Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Khi đó phương trình trở thành $x^2 - x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

So sánh điều kiện ta được $x = 2$ là nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

d) Điều kiện: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Khi đó phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2$.

So sánh điều kiện ta được $x = 2$ bị loại. Vậy phương trình vô nghiệm.

3. a) $2x + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3x}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

b) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

c) $x^2 + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \pm\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$.

d) $\sqrt{x-4}\,(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

4. a) $\dfrac{|x|}{\sqrt{x-1}} = x\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ |x| = x(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

b) $\dfrac{2|x|}{\sqrt{x-1}} = x^2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2|x| = x^2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^3-x^2-2x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=0 \vee x=-1 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

c) $2|x-1| = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2=2x-3 \\ 2x-2=3-2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

d) $x|x-1| = -(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-1) = -(x-2)^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x<1 \\ x(1-x) = -(x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-5x+4=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x<1 \\ -3x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

5. a) Điều kiện: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.

* $x = \dfrac{1}{2}$: Vế trái = vế phải = 0 $\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm.

* $x > \dfrac{1}{2}$: Vế trái > 0; vế phải < 0 $\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm thỏa $x > \dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Điều kiện: $x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$.

* $x = m$: Vế trái = vế phải $\Rightarrow x = m$ là nghiệm.

* $x > m$: Vế trái > m; vế phải = m $\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm thỏa $x > m$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = m$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$

Khi đó: Vế trái > 1 và vế phải < 1 $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

d) $\dfrac{x^2-3x-m^2}{\sqrt{x-m^2}} = \sqrt{x-m^2}$ (*)

Điều kiện: $x - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow x > m^2$.

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 = x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = 4$.

* $m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Leftrightarrow x > m^2 \Rightarrow x = 4$ là nghiệm.

* $m^2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -2$ hay $m \geq 2 \Leftrightarrow x \leq m^2 \Rightarrow x = 4$ không là nghiệm.

Vậy: * $-2 < m < 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

* $m \le -2$ hay $m \ge 2$: Phương trình vô nghiệm.

Vấn đề 3: Giải phương trình bằng cách giải phương trình hệ quả

1. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+16}+x^2+16=40 \Rightarrow x\sqrt{x^2+16}=24-x^2$

$\Rightarrow x^2(x^2+16)=576-48x^2+x^4 \Rightarrow 64x^2=576 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3.$

Thử lại ta được $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

2. $x+\sqrt{x^2-9}=\dfrac{54}{\sqrt{x^2+11}}$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-9}.\sqrt{x^2+11}=54$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-9}.\sqrt{x^2+11}=54-x\sqrt{x^2+11}$

$\Rightarrow (x^2-9)(x^2+11)=2916-108x\sqrt{x^2+11}+x^2(x^2+11)$

$\Rightarrow 108x\sqrt{x^2+11}=9x^2+3015$

$\Rightarrow 12x\sqrt{x^2+11}=x^2+335$

$\Rightarrow 144x^2(x^2+11)=x^4+670x^2+112225$

$\Rightarrow 143x^4+914x^2-112225=0$

$\Rightarrow x^2=25$ hoặc $x^2=-\dfrac{4489}{143}$

$\Rightarrow x=\pm 5.$

Thử lại ta được $x = 5$ là nghiệm của phương trình.

3. $\dfrac{\sqrt{25-x^2}+2}{\sqrt{x+6}}=\sqrt{7-x}$.

$\Rightarrow \sqrt{25-x^2}+2=\sqrt{x+6}\sqrt{7-x}$

$\Rightarrow 25-x^2+4\sqrt{25-x^2}+4=(x+6)(7-x)$

$\Rightarrow 29-x^2+4\sqrt{25-x^2}=-x^2+x+42$

$\Rightarrow 4\sqrt{25-x^2}=x+13$

$\Rightarrow 16(25-x^2)=x^2+26x+169$

$\Rightarrow 17x^2+26x-231=0$

$\Rightarrow x=3$ hay $x=-\dfrac{77}{17}$.

Thử lại ta được $x = 3$ là nghiệm.

4. $x^2+1+\sqrt{x^2-3}+x\sqrt{x^2+5}=0$.

$\Rightarrow x^2+1+\sqrt{x^2-3}=-x\sqrt{x^2+5}$

$\Rightarrow \left(x^2+1\right)^2+2(x^2+1)\sqrt{x^2-3}+x^2-3=x^2(x^2+5)$

$\Rightarrow 2(x^2+1)\sqrt{x^2-3}=2x^2+2$

$\Rightarrow (x^2+1)\sqrt{x^2-3}=x^2+1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-3}=1 \Rightarrow x=\pm 2.$

Thử lại ta được x = –2 là nghiệm.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

Vấn đề 1: **Giải và biện luận phương trình dạng ax + b = 0.**

1. a) $2(m-1)x-m(x-1)=2m-3$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 2mx-2x-mx+m=2m-3 \Leftrightarrow (m-2)x-m+3=0.$

▸ $a=m-2=0 \Leftrightarrow m=2$: (1) $\Leftrightarrow 0x+1=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

▸ $a=m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$: (1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{3-m}{m-2}$.

Kết luận: * m = 2: $S=\varnothing$.

* $m\neq 2$: $S=\left\{\dfrac{3-m}{m-2}\right\}$.

b) $3(m+2)x+5=3x+5(m+2)$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 3mx+6x-3x+5-5m-10=0 \Leftrightarrow (3m+3)x-5m-5=0.$

▸ $a=3m+3=0 \Leftrightarrow m=-1$: (2) $\Leftrightarrow 0x+0=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

▸ $a=3m+3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$: (2) $\Leftrightarrow x=\dfrac{5m+5}{3m+3}=\dfrac{5}{3}$.

Kết luận: * m = –1: $S=\mathbb{R}$.

* $m\neq -1$: $S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c) $m^2(x-1)=x-3m+2$ (3)

(3) $\Leftrightarrow (m^2-1)x-m^2+3m-2=0$

▸ $a=m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$:

* m = 1: (3) $\Leftrightarrow 0x+0=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

* m = –1: (3) $\Leftrightarrow 0x-6=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

▸ $a=m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$ và $m\neq 1$: (3) $\Leftrightarrow x=\dfrac{m^2-3m+2}{m^2-1}=\dfrac{m-2}{m+1}$.

Kết luận: * m = 1: $S=\mathbb{R}$.

* $m = -1$: $S = \varnothing$.

* $m \neq -1$ và $m \neq 1$: $S = \left\{\dfrac{m-2}{m+1}\right\}$.

d) $m^2x - 9 = 9mx + 3m$ (4)

$(4) \Leftrightarrow (m^2 - 9m)x - 3m - 9 = 0$.

▸ $a = m^2 - 9m = 0 \Leftrightarrow m = 9$ hoặc $m = 0$:

* $m = 9$: $(4) \Leftrightarrow 0x - 36 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $m = 0$: $(4) \Leftrightarrow 0x - 9 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

▸ $a = m^2 - 9m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$ và $m \neq 0$: $(4) \Leftrightarrow x = \dfrac{3m+9}{m^2-9m}$.

Kết luận: * $m = 0$ hay $m = 9$: $S = \varnothing$.

* $m \neq 0$ và $m \neq 9$: $S = \left\{\dfrac{3m+9}{m^2-9m}\right\}$.

2. a) $m(m^2 - 1)x = m(m + 1)$ (1)

▸ $a = m(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ hoặc $m = 0$:

* $m = 1$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $m = -1$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

* $m = 0$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = m(m^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$; $m \neq 1$ và $m \neq -1$: $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{m(m+1)}{m(m^2-1)} = \dfrac{1}{m-1}$.

Kết luận: * $m = 0$ hay $m = -1$: $S = \mathbb{R}$.

* $m = 1$: $S = \varnothing$.

* $m \neq 0$; $m \neq 1$ và $m \neq -1$: $S = \left\{\dfrac{1}{m-1}\right\}$.

b) $x\sqrt{m-2} = m - 2$. (2)

▸ $a = \sqrt{m-2} = 0 \Leftrightarrow m = 2$: $(2) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = \sqrt{m-2} \neq 0 \Leftrightarrow m > 2$: $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{m-2}{\sqrt{m-2}} = \sqrt{m-2}$.

Kết luận: * $m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

* $m < 2$: $S = \varnothing$.

* $m > 2$: $S = \left\{\sqrt{m-2}\right\}$.

c) $(m + 1)x = \sqrt{m+1}$ (3)

▸ $a = m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$: $(3) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$: $(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{m+1}}{m+1} = \dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$.

Kết luận: * $m = -1$: $S = \mathbb{R}$.

* $m < -1$: $S = \varnothing$.

* $m > -1$: $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right\}$.

d) $\frac{(m-2)x}{m-1} = \frac{m^2-4}{m-1}$. (4)

(4) $\Leftrightarrow (m-2)x = m^2 - 4$ $(m \neq 1)$

▸ $a = m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: (4) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq 1$: (4) $\Leftrightarrow x = \frac{m^2-4}{m-2} = m + 2$.

Kết luận: * $m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

* $m = 1$: $S = \varnothing$.

* $m \neq 2$ và $m \neq 1$: $S = \{m + 2\}$.

3. a) $m^2(x - 1) = 2 - 2x$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (m^2 + 2)x - m^2 - 2 = 0$.

Ta có $\forall m \in \mathbb{R}$ thì $a = m^2 + 2 \neq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x = \frac{m^2+2}{m^2+2} = 1$.

b) $2x(m - 1) = m(x - 1) + m^2 - 2$ (2)

(2) $\Leftrightarrow (m - 2)x = m^2 - m - 2$

▸ $a = m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: (2) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: (2) $\Leftrightarrow x = \frac{m^2-m-2}{m-2} = m + 1$.

Kết luận: * $m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

* $m \neq 2$: $S = \{m + 1\}$.

c) $m^3x + 1 = m^2(x + 1)$ (3)

(3) $\Leftrightarrow (m^3 - m^2)x = m^2 - 1$

▸ $a = m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = 0$:

Khi $m = 0$: (3) $\Leftrightarrow 0x = -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Khi $m = 1$: (3) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = m^3 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 0$: (3) $\Leftrightarrow x = \frac{m^2-1}{m^3-m^2} = \frac{m+1}{m^2}$.

Kết luận: * $m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

* $m = 0$: $S = \varnothing$.

* $m \neq 1$ và $m \neq 0$: $S = \left\{\frac{m+1}{m^2}\right\}$.

d) $(x - 1)m^2 - (2x + 1)m + x + 2 = 0$ (4)

(4) $\Leftrightarrow (m^2 - 2m + 1)x - m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - (m - 1)(m + 2) = 0$.

▸ $a = (m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (4) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

▸ $a = (m-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$: (4) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m^2+m-2}{(m-1)^2} = \dfrac{m+2}{m-1}$.

Kết luận: * $m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

* $m \neq 1$: $S = \left\{\dfrac{m+2}{m-1}\right\}$.

4. $\dfrac{x-a}{a-b} + \dfrac{x-b}{a+b} + \dfrac{2b(x+a)}{a^2-b^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(a+b) + (x-b)(a-b) + 2b(x+a) = 0$

$\Leftrightarrow (2a+2b)x - a^2 - ab - ab + b^2 + 2ab = 0$

$\Leftrightarrow 2(a+b)x = a^2 - b^2$.

Vì $a \neq \pm b$ nên phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{a^2-b^2}{2(a+b)} = \dfrac{a-b}{2}$.

***Vấn đề 2:* Định m để phương trình ax + b = 0 thỏa điều kiện về tập nghiệm**

1. a) $(m+1)x - (x+2m) = 4 \Leftrightarrow mx - 2m - 4 = 0$ (1)

Ta có: (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

b) $(m+1)^2x - 2 = (4m+9)x + m \Leftrightarrow (m^2 - 2m - 8)x - m - 2 = 0$ (2).

Ta có: (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 8 = 0 \\ -m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

c) $m^2(x-1) = 2(2x - m - 4) \Leftrightarrow (m^2 - 4)x - m^2 + 2m + 8 = 0$ (3)

Ta có: (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ -m^2 + 2m + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$

d) $(4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x \Leftrightarrow (4m^2 - 1)x - 2m - 1 = 0$ (4)

Ta có: (4) $\Leftrightarrow$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 = 0 \\ -2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}.$

2. a) $m^2x + m + 2 = m^2 + 4x \Leftrightarrow (m^2 - 4)x - m^2 + m + 2 = 0$ (1)

Ta có: (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ -m^2 + m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

b) $a(x+1) + b(2x-1) = x - 2 \Leftrightarrow (a + 2b - 1)x + a - b + 2 = 0$ (2)

Ta có: (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ a - b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$

c) $m^2x - m = 4x - 2 \Leftrightarrow (m^2 - 4)x - m + 2 = 0$ (3)

Ta có: (3) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4=0 \\ -m+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$

d) $m^2(x-1)=9x+m-6 \Leftrightarrow (m^2-9)x-m^2-m+6=0$ (4).

Ta có: (4) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9=0 \\ -m^2-m+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$

3. a) $m^2x=4x+m^2+m-2 \Leftrightarrow (m^2-4)x-m^2-m+2=0$ (1).

Ta có (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4=0 \\ -m^2-m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m\neq -2.$

b) $m^2(x-1)=x-m \Leftrightarrow (m^2-1)x-m^2+m=0$ (2)

Ta có (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ -m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$

Do đó (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m\neq -1.$

c) $m(x-m)=x-m \Leftrightarrow (m-1)x-m^2+m=0$ (3)

Ta có (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ -m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Do đó (3) có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}.$

d) $m(x-1)=x-m^2 \Leftrightarrow (m-1)x+m^2-m=0$ (4)

Ta có (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m^2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Do đó (4) có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}.$

Vấn đề 3: Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2+bx+c=0$

1. a) $x^2-(2-\sqrt{2})x-2\sqrt{2}=0$

$\Delta=(2-\sqrt{2})^2-4.(-2\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2>0.$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$x=\dfrac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2}=1;\ x=\dfrac{2-\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})}{2}=-\sqrt{2}.$

b) $x^2-\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)x+5\sqrt{2}=0$

$\Delta=\left(\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)\right)^2-4.5\sqrt{2}=5(3+2\sqrt{2})-20\sqrt{2}$

$=5(3-2\sqrt{2})=\sqrt{5(\sqrt{2}-1)^2}.$

Do đó phương trình có hai nghiệm là:

$x = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{5}$; $x = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{10}$.

c) $x^2 - (2m + 1)x + m(m + 1) = 0$

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4m(m + 1) = 1 > 0, \forall\ m$.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt là:

$x = \dfrac{2m+1+1}{2} = m+1$; $x = \dfrac{2m+1-1}{2} = m$.

d) $x^2 - 2x + 1 - 4m^2 = 0$.

$\Delta' = 1 - (1 - 4m^2) = 4m^2$.

* $m = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.
* $m \neq 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là
  $x = 1 + 2m$; $x = 1 - 2m$.

e) $x^2 - (m - 2)x + 1 - m = 0$

Phương trình có dạng $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là:
$x = -1$; $x = m - 1$.

f) $x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 - 2 = 0$.

Phương trình có dạng $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là:
$x = 1$; $x = m^2 - 2$.

2. a) $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 3 = 0$ (1)

- $a = m = 0$: $(1) \Leftrightarrow -6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
- $a = m \neq 0$: $\Delta' = (m + 3)^2 - m(m + 3) = 9 + 3m$.
  * $m < -3$: $\Delta' < 0$ nên (1) vô nghiệm.
  * $m = -3$: $\Delta' = 0$ nên (1) có nghiệm kép là $x = 0$.
  * $m > -3$: $\Delta' > 0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{m+3\pm\sqrt{3m+9}}{m}$.

Kết luận: * $m = 0$: $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$;

* $m = -3$: $S = \{0\}$;
* $m < -3$: $S = \varnothing$.
* $m > -3$ và $m \neq 0$: $S = \left\{\dfrac{m+3\pm\sqrt{3m+9}}{m}\right\}$.

b) $(m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 4m - 1 = 0$ (2)

- $a = m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$: $(2) \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
- $a = m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: $\Delta' = (2m + 1)^2 - (m + 1)(4m - 1) = 2 + m$.
  * $m < -2$: $\Delta' < 0$ nên (2) vô nghiệm.

* $m = -2$: $\Delta' = 0$ nên (2) có nghiệm kép là $x = \dfrac{2m+1}{m+1} = 3$.

* $m > -2$: $\Delta' > 0$ nên (2) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{2m+1 \pm \sqrt{m+2}}{m}$.

Kết luận: * $m = -1$: $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$;

* $m = -2$: $S = \{3\}$;

* $m < -2$: $S = \varnothing$.

* $m > -2$ và $m \neq -1$: $S = \left\{\dfrac{2m+1 \pm \sqrt{m+2}}{m}\right\}$.

c) $3mx^2 + (4 - 6m)x + 3(m - 1) = 0$ (3)

▸ $a = 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$: $(3) \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

▸ $a = 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$: $\Delta' = (2 - 3m)^2 - 3m(3m - 3) = -3m + 4$.

* $m > \dfrac{4}{3}$: $\Delta' < 0$ nên (3) vô nghiệm.

* $m = \dfrac{4}{3}$: $\Delta' = 0$ nên (3) có nghiệm kép là $x = \dfrac{3m-2}{3m} = \dfrac{1}{2}$.

* $m < \dfrac{4}{3}$: $\Delta' > 0$ nên (3) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{3m-2 \pm \sqrt{4-3m}}{3m}$.

Kết luận: * $m = 0$: $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$;

* $m = \dfrac{4}{3}$: $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$;

* $m > \dfrac{4}{3}$: $S = \varnothing$.

* $m < \dfrac{4}{3}$ và $m \neq 0$: $S = \left\{\dfrac{3m-2 \pm \sqrt{4-3m}}{3m}\right\}$.

d) $(k^2 - 5k - 36)x^2 - 2(k + 4)x + 1 = 0$ (4)

▸ $a = k^2 - 5k - 36 = 0 \Leftrightarrow k = 9$ hay $k = -4$:

* $k = 9$: $(4) \Leftrightarrow 26x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{26}$.

* $k = -4$: $(4) \Leftrightarrow 0x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

▸ $a = k^2 - 5k - 36 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 9$ và $k \neq -4$:

$\Delta' = (k + 4)^2 - (k^2 - 5k - 36) = 13k + 52$.

* $k < -4$: $\Delta' < 0$ nên (3) vô nghiệm.

* $k > -4$: $\Delta' > 0$ nên (3) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{k+4 \pm \sqrt{13k+52}}{k^2-5k-36}$.

Kết luận:

* $k = 9$: $S = \left\{-\dfrac{1}{26}\right\}$;

* $k \le -4$: $S = \varnothing$.

* $k > -4$ và $k \ne 9$: $S = \left\{\dfrac{k+4 \pm \sqrt{13k+52}}{k^2-5k-36}\right\}$.

e) $(x-1)[(k+1)x-4] = 0$ (5)

$$(5) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ (k+1)x = 4 \ (5a) \end{bmatrix}$$

* $k = -1$: (5a) $\Leftrightarrow 0x = 4 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Do đó (5) có một nghiệm là $x = 1$.

* $k \ne -1$: (5a) $\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{k+1} = x_0$.

(5a) có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow k + 1 = 4 \Leftrightarrow k = 3$.

Do đó: + $k = 3$: $x_0 = 1 \Rightarrow$ (5) có một nghiệm là $x = 1$.

+ $k \ne 3$: $x_0 \ne 1 \Rightarrow$ (5) có hai nghiệm là $x = 1$; $x = \dfrac{4}{k+1}$.

Kết luận: * $k = -1$ hay $k = 3$: $S = \{1\}$.

* $k \ne -1$ và $k \ne 3$: $S = \left\{1; \dfrac{4}{k+1}\right\}$.

f) $(mx-2)[(m-2)x+2] = 0$ (6)

$$(6) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} mx - 2 = 0 \quad (6a) \\ (m-2)x + 2 = 0 \ (6b) \end{bmatrix}$$

- $m = 0$: $(6) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0x - 2 = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 1$.

- $m = 2$: $(6) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 2 = 0 \\ 0x + 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 1$.

- $m \ne 0$ và $m \ne 2$: $(6) \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2}{m}$ *hay* $x_2 = \dfrac{2}{2-m}$.

Ta có: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow m = 2 - m \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó $x_1 = x_2 = 2$.

Do đó: $m = 1$: $(6) \Leftrightarrow x = 2$.

$m \ne 1$: $(6) \Leftrightarrow x = x_1$ hay $x = x_2$.

Kết luận: * $m = 0$ hay $m = 2$: $S = \{1\}$.

* $m = 1$: $S = \{2\}$.

* $m \neq 0$, $m \neq 1$ và $m \neq 2$: $S = \{x_1; x_2\}$.

3. a) $mx^2 - (1 - 2m)x + m + 4 = 0$ (1)

(1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (1-2m)^2 - 4m(m+4) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -20m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{20}$ và $m \neq 0$.

b) $(m - 2)x^2 + 2(m - 3)x + m - 5 = 0$ (2)

(2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ (m-3)^2 - (m-2)(m-5) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$ và $m \neq 2$.

c) $(x - 2)[(m - 1)x + 2] = 0$ (3)

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ (m-1)x + 2 = 0 \ (3a) \end{array}\right.$

(3) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3a) có nghiệm duy nhất khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ (m-1).2 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

d) $(mx - 3)[(m + 1)x - 3] = 0$. (4)

$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx - 3 = 0 & (4a) \\ (m+1)x - 3 = 0 & (4b) \end{array}\right.$.

(4) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (4a) và (4b) có nghiệm duy nhất khác nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 1 \neq 0 \\ \dfrac{3}{m} \neq \dfrac{3}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

4. Xét hai phương trình: $x^2 + 2x - m = 0$ (1) và $x^2 - 3x + 4m = 0$ (2).

▸ (1) và (2) có nghiệm chung $x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - m = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + 4m = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 - 5m = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = m \\ m^2 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ hay $m = -1$.

Với $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -2$; (2) $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 3$. Do đó (1) và (2) có nghiệm chung là $x = 0$.

Với m = –1 thì (1) $\Leftrightarrow$ x = –1; (2) $\Leftrightarrow$ x = –1 hay x = 4. Do đó (1) và (2) có nghiệm chung là x = –1.

Vậy (1) và (2) có nghiệm chung $\Leftrightarrow$ m = 0 hay m = –1.

▸ $(x^2 + 2x - m)(x^2 - 3x + 4m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - m = 0 \\ x^2 - 3x + 4m = 0 \end{cases}$ (*)

Do đó:

(*) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) và (2) cùng có hai nghiệm phân biệt và không có nghiệm chung.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ \Delta_{(2)} > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 9 - 16m > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < \dfrac{9}{16} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

5. Phương trình $x^2 + mx + k = 0$ có hai nghiệm lần lượt là m và k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m.m + k = 0 \\ k^2 + mk + k = 0 \\ m \neq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2m^2 \\ 4m^4 - 2m^3 - 2m^2 = 0 \\ m \neq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = -2 \end{cases}.$$

6. Xét: $x^2 - 8x + 4m = 0$ (1) và $x^2 + x - 4m = 0$ (2).

Giả sử (1) có nghiệm x_1 gấp hai nghiệm x_0 của (2) $\Rightarrow x_1 = 2x_0$.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 - 4m = 0 \\ (2x_0)^2 - 8(2x_0) + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0^2 - 15x_0 = 0 \\ 4m = x_0^2 + x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ m = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_0 = 3 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Với m = 0:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ hay $x_2 = 8$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$ hay $x_4 = -1$.

Ta thấy $x_1 = 2x_3 \Rightarrow$ m = 0 (nhận)

Với m = 3: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ hay $x_2 = 6$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 3$ hay $x_4 = -4$.

Ta thấy $x_2 = 2x_3 \Rightarrow$ m = 3 (nhận)

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ m = 0 hay m = 3.

7. * Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (k + 2)^2 - k - 14 > 0 \Leftrightarrow k^2 + 3k - 10 > 0$

$\Leftrightarrow (k + 5)(k - 2) > 0 \Leftrightarrow k < -5$ hay $k > 2$.

Vì k là số nguyên dương nhỏ nhất nên k = 3.

8. a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1| = |x_2|$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ hay $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 0$ hay $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4m + 16 = 0$ hay $\begin{cases} -4m+16>0 \\ m-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 4$ hay $m = 2$.

b) Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1|$ và $|x_2|$ là nghịch đảo của nhau

$$\Leftrightarrow |x_1.x_2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 1 \ hay \ P = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m+16 \geq 0 \\ m^2 - 12 = 1 \ hay \ m^2 - 12 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = \pm\sqrt{13} \ hay \ m = \pm\sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{13} \text{ hay } m = \pm\sqrt{11}.$$

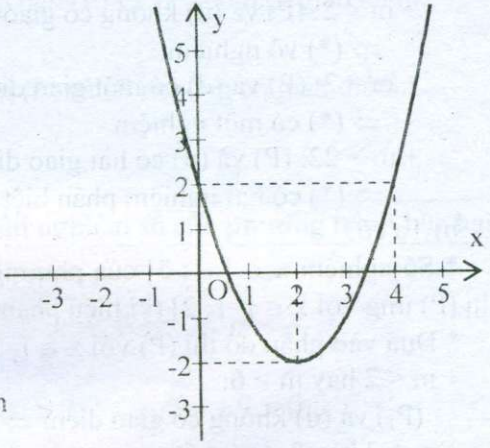
Vấn đề 4: **Dùng phương pháp đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình bậc hai**

1. a) $x^2 - x + 2 = 3x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = m$ (1)

* Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ và parabol (P): $y = x^2 - 4x + 2$.

* Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (P) và (d).

* Ta có đồ thị (P) có dạng sau:



* Nhìn đồ thị (P) ta có:

+ $m < -2$: (P) và (d) không có giao điểm
$\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

+ $m = -2$: (P) và (d) có một giao điểm
$\Rightarrow$ (1) có một nghiệm.

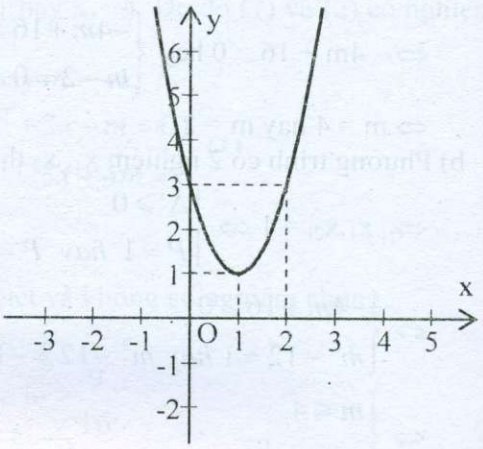
+ $m > -2$: (P) và (d) có hai giao điểm
$\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) $2x^2 - m = 4x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = m$ (2).

* Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ và parabol (P): $y = 2x^2 - 4x + 3$.

* Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của (P) và (d).

* Ta có đồ thị (P) có dạng sau:



* Nhìn đồ thị (P) ta có:

+ $m < 1$: (P) và (d) không có giao điểm
$\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

+ $m = 1$: (P) và (d) có một giao điểm
$\Rightarrow$ (2) có một nghiệm.

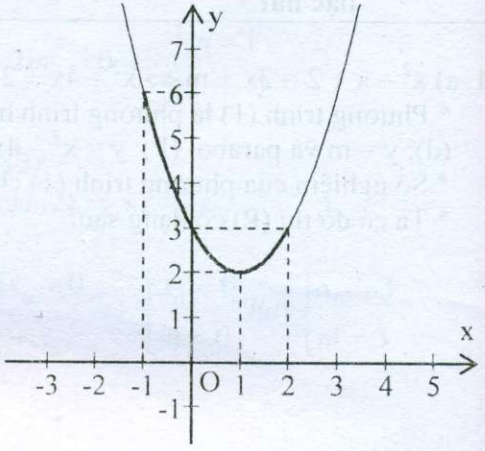
+ $m > 1$: (P) và (d) có hai giao điểm
$\Rightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt.

2. a) Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = m$.

* Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ và parabol (P): $y = x^2 - 2x + 3$.

* Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của (P) và (d).

* Ta có đồ thị (P) có dạng sau:



* Nhìn đồ thị (P) ta có:

+ $m < 2$: (P) và (d) không có giao điểm
$\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

+ $m = 2$: (P) và (d) có một giao điểm
$\Rightarrow$ (*) có một nghiệm.

+ $m > 22$: (P) và (d) có hai giao điểm
$\Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt.

b) Ta có:

* Số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình (*) chính là số giao điểm của phần đồ thị (P) ứng với $x \in [-1; 2]$ (kí hiệu phần này là (P_1)) và (d).

* Dựa vào phần đồ thị (P) với $x \in [-1; 2]$, ta có:

+ $m < 2$ hay $m > 6$:
(P_1) và (d) không có giao điểm $\Rightarrow$ (*) không có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

+ $m = 2$ hay $3 < m \leq 6$:
(P_1) và (d) có một giao điểm $\Rightarrow$ (*) có một nghiệm $x \in [-1; 2]$.

+ $2 < m \leq 3$:
(P_1) và (d) có hai giao điểm $\Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in [-1; 2]$.

c) (*) có đúng một nghiệm $x < 2$
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng (d) và phần đồ thị (P) với $x < 2$ có đúng một giao điểm
$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m \geq 3$.

3. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (P') là:

$$-x^2 + 4x - 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 - m = 0 \qquad (1)$$

Ta có: (1) có $\Delta' = 4 - 6 + 2m = 2m - 2$.

Do đó:

* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$: (1) có hai nghiệm phân biệt nên (P) và (P') có hai giao điểm.
* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (1) có nghiệm kép nên (P) và (P') có một giao điểm.
* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 1$: (1) vô nghiệm nên (P) và (P') không có giao điểm.

b) $y = x^2 + 2mx - 4$ và $y = x^2 + 4x - 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (P') là:

$x^2 + 2mx - 4 = x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow (2m - 4)x + 1 = 0$ (2)

Do đó:

* $a = 0 \Leftrightarrow m = 2$:

  (2) $\Leftrightarrow 0x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \Leftrightarrow$ (P) và (P') không có giao điểm.

* $a \neq 0 \Leftrightarrow m = 2$: (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (P) và (P') có một giao điểm.

c) $y = x^2 + 2mx + 3$ và $y = x - m^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (P') là:

$x^2 + 2mx + 3 = x - m^2 \Leftrightarrow x^2 + (2m - 1)x + 3 + m^2 = 0$ (3)

Ta có: (3) có $\Delta = (2m - 1)^2 - 4(3 + m^2) = -4m - 11$.

Do đó:

* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{11}{4}$: (3) có hai nghiệm phân biệt nên (P) và (P') có hai giao điểm phân biệt.

* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{4}$: (3) có nghiệm kép nên (P) và (P') có một giao điểm.

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{11}{4}$: (3) vô nghiệm nên (P) và (P') không có giao điểm.

Vấn đề 5: Ứng dụng của định lí Vi-ét để xét dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

1. $x^2 - (2m - 6)x + m^2 - 3m = 0$ (1)

a) (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Vậy (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 0 < m < 3$.

b) (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m + 9 > 0 \\ -2m + 6 > 0 \\ m^2 - 3m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m < 3 \\ m < 0 \text{ hay } m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$

Vậy (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$

c) Có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\left[\begin{array}{l} x_1 < 0 < x_2 \\ 0 = x_1 < x_2 \\ 0 < x_1 = x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow P < 0 \text{ hay} \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \text{ hay} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m < 0 \text{ hay } \begin{cases} m^2 - 3m = 0 \\ -2m + 6 > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -3m + 9 = 0 \\ -2m + 6 > 0 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow 0 < m < 3$ hay $m = 0 \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

Vậy (1) có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

2. $x^2 + (m - 2)x + m + 13 = 0$ (*)

a) Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 48 \geq 0 \\ -m + 2 > 0 \\ m + 13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \text{ hay } m \geq 12 \\ m < 2 \\ m > -13 \end{cases} \Leftrightarrow -13 < m \leq -4.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow -13 < m \leq -4$.

b) Phương trình có nghiệm dương $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\left[\begin{array}{l} x_1 < 0 < x_2 \\ 0 = x_1 < x_2 \\ 0 < x_1 \leq x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow P < 0 \text{ hay} \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \text{ hay} \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m + 13 < 0 \text{ hay} \begin{cases} m + 13 = 0 \\ -m + 2 > 0 \end{cases} \begin{cases} m^2 - 8m - 48 \geq 0 \\ -m + 2 > 0 \\ m + 13 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -13 \text{ hay } m = -13 \text{ hay } \begin{cases} m \leq -4 \text{ hay } m \geq 12 \\ m < 2 \\ m > -13 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \leq -13$ hay $-13 < m \leq -4 \Leftrightarrow m \leq -4$.

Vậy (*) có nghiệm dương $\Leftrightarrow m \leq -4$.

c) Có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$.

(*) trở thành $(t + 1)^2 + (m - 2)(t + 1) + m + 13 = 0 \Leftrightarrow t^2 + mt + 2m + 12 = 0$ (**)

Ta có: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow t_1 < 0 < t_2$.

Do đó: (*) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow$ (**) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 2m + 12 < 0 \Leftrightarrow m < -6.$

Vậy (*) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow m < -6.$

3. $mx^2 - 2(m-3)x + m - 5 = 0$ (1)

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 9 > 0 \\ \dfrac{2(m-3)}{m} > 0 \\ \dfrac{m-5}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 9 \\ m < 0 \text{ hay } m > 3 \\ m < 0 \text{ hay } m \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5 \leq m < 9 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow m < 0$ hay $5 \leq m < 9.$

b) Đặt $t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2.$

(1) trở thành $m(t+2)^2 - 2(m-3)(t+2) + m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 + 4mt + 4m - 2(m-3)t - 4(m-3) + m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 + 2(m+3)t + m + 7 = 0$ (2).

Ta có: $x_1 \leq x_2 < 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 \leq x_2 - 2 < 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 < 0.$

Phương trình (1) có hai nghiệm nhỏ hơn 2

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm thỏa $t_1 \leq t_2 < 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 9 \geq 0 \\ \dfrac{-2(m+3)}{m} < 0 \\ \dfrac{m+7}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 9 \\ m < -3 \text{ hay } m > 0 \\ m < -7 \text{ hay } m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ 0 < m \leq 9 \end{cases}.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -7$ hay $0 < m \leq 9.$

c) Phương trình (1) có hai nghiệm có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 2.

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x| < 2$

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $-2 \leq x_1 \leq x_2 < 2.$

* (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq x_2 < 2 \Leftrightarrow m < -7$ hay $0 < m \leq 9$ (theo b).

* (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $-2 \leq x_1 \leq x_2$:

Đặt $t = x + 2 \Rightarrow x = t - 2.$

(1) trở thành $m(t-2)^2 - 2(m-3)(t-2) + m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 - 4mt + 4m - 2(m-3)t + 4(m-3) + m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 - 2(3m-3)t + 9m - 17 = 0$ (3).

Ta có: $-2 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 + 2 \leq x_2 - 2 \Leftrightarrow 0 < t_1 \leq t_2.$

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa $-2 < x_1 \leq x_2$

$\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm thỏa $0 < t_1 \leq t_2.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 9 \geq 0 \\ \dfrac{2(3m-3)}{m} > 0 \\ \dfrac{9m-17}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 9 \\ m < 0 \text{ hay } m > 1 \\ m < 0 \text{ hay } m > 17/9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{17}{9} < m \leq 9 \end{cases}.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$ hay $\dfrac{17}{9} < m \leq 9$.

Do đó m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \text{ hay } 0 < m \leq 9 \\ m < 0 \text{ hay } \dfrac{17}{9} < m \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m < -7$ hay $\dfrac{17}{9} < m \leq 9$.

4. Ta có: $2x^2 - (k+2)x + 7 = k^2 \Leftrightarrow 2x^2 - (k+2)x + 7 - k^2 = 0$ (1).

Ta có:

(1) có hai nghiệm trái dấu nhau và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ |P| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - k^2 < 0 \\ \left|\dfrac{7-k^2}{2}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 7 \\ 7 - k^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 7 \\ k = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = \pm 3.$$

Vậy k thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k = \pm 3$.

Vấn đề 6: **Ứng dụng của định lí Vi-ét để xét biểu thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai**

1. Ta có: $x_1 + x_2 = S = 2$ và $x_1x_2 = -1$. Do đó:

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2(-1) = 6.$

$B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2^3 - 3.(-1).2 = 14.$

$C = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 6^2 - 2.(-1)^2 = 34.$

$D = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -1.2 = -2.$

$E = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = -1 - 2.2 + 4 = -1.$

$F = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{6}{-1} = -6.$

2. * Ta có: $\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

* Ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{a+b}{ab}$

$$x_2 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2ab} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2ab} = \frac{\sqrt{\Delta}}{ab}.$$

Do đó ta có: $\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}=\frac{a+b}{\sqrt{\Delta}}=\frac{a+b}{a-b}$.

3. a) $x^2-(2m-3)x+m^2-4=0$ (1)

Ta có khi (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $S=x_1+x_2=2m-3$ và $P=x_1x_2=m^2-4$.

Từ $S=2m-3\Rightarrow m=\frac{S+3}{2}$. Thay vào P ta được:

$$P=\left(\frac{S+3}{2}\right)^2-4\Leftrightarrow (S+3)^2-4P-4=0$$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2+3)^2-4x_1x_2-4=0$ (*)

Hệ thức (*) chính là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

b) $mx^2-(2m+3)x+m-4=0$ (2)

Ta có khi (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $S=x_1+x_2=\frac{2m+3}{m}$ và $P=x_1x_2=\frac{m-4}{m}$.

Ta có: $S=2+\frac{3}{m}$ và $P=1-\frac{4}{m}\Rightarrow 4S=8+\frac{12}{m}$ và $3P=3-\frac{12}{m}$.

Suy ra: $4S+3P=11\Leftrightarrow 4(x_1+x_2)+3x_1x_2-11=0$ (**)

Hệ thức (**) chính là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

c) $(m-1)x^2-(2m+5)x+m-3=0$ (3).

Ta có khi (3) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $S=x_1+x_2=\frac{2m+5}{m-1}$ và $P=x_1x_2=\frac{m-3}{m-1}$.

Ta có: $S=2+\frac{7}{m-1}$ và $P=1-\frac{2}{m-1}\Rightarrow 2S=4+\frac{14}{m-1}$ và $7P=7-\frac{14}{m-1}$.

Suy ra: $2S+7P=11\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)+7x_1x_2-11=0$ (***)

Hệ thức (***) chính là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

4. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=(2a-1)^2-4(a^2+2)=-4a-7\geq 0\Leftrightarrow a\leq -\frac{7}{4}$.

Ta có: $x_1+x_2=-1+2a$ và $x_1x_2=a^2+2$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

$x_1=2x_2$ hay $x_2=2x_1$

$\Leftrightarrow (x_1-2x_2)(x_2-2x_1)=0$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2-2(x_1^2+x_2^2)=0$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2-2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=0$

$\Leftrightarrow 9x_1x_2-2(x_1+x_2)^2=0$

$\Leftrightarrow 9(a^2+2)-2(1-2a)^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16=0\Leftrightarrow a=-4$ (thỏa điều kiện)

Vậy a thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow a=-4$.

5. Phương trình có hai nghiệm thỏa $x_1=9x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m+2 \\ x_1 = 9x_2 \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_2 = 3m+2 \\ x_1 = 9x_2 \\ 9x_2^2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3m+2}{10} \\ 9.\left(\dfrac{3m+2}{10}\right)^2 = m^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 100m^2 = 81m^2 + 108m + 36 \Rightarrow 19m^2 - 108m - 36 = 0 \Rightarrow m = 6$ hay $m = -\dfrac{6}{19}$.

- $m = 6$: Phương trình trở thành

$$x^2 + 20x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -18 \\ x_2 = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 9x_2 \Rightarrow m = 6 \text{ (nhận).}$$

- $m = -\dfrac{6}{19}$: Phương trình trở thành

$$x^2 - \frac{20}{19}x + \frac{36}{361} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{18}{19}, x_2 = \frac{2}{19} \Rightarrow x_1 = 9x_2 \Rightarrow m = -\frac{6}{19} \text{ (nhận).}$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 6$ hay $m = -\dfrac{6}{19}$.

6. Ta có phương trình có nghiệm x_1, x_2 sao cho $\begin{bmatrix} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - (x_2^3 + x_1^3) = 0$$

$$\Rightarrow P + P^2 - [S^3 - 3SP] = 0 \text{ mà } S = \frac{15}{4}; P = \frac{m}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{8} + \frac{m^2}{64} - \left(\frac{15}{4}\right)^3 + 3.\frac{15}{4}.\frac{m}{8} = 0$$

$\Leftrightarrow m^2 + 98m - 3375 = 0 \Leftrightarrow m = -125$ hay $m = 27$.

- $m = -125$: Phương trình trở thành

$$8x^2 - 30x - 125 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{5}{2}; x_2 = \frac{25}{4} \Rightarrow m = -125 \text{ (nhận).}$$

- $m = 27$: Phương trình trở thành

$$8x^2 - 30x + 27 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = 27 \text{ (nhận).}$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = -125$ hay $m = 27$.

7. - Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

- Khi đó ta có $x_1 + x_2 = -2m$ và $x_1x_2 = 4$. Suy ra:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 8$$

Do đó: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=7 \Leftrightarrow \frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}=7 \Leftrightarrow (x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=7x_1^2x_2^2$

$\Leftrightarrow (4m^2-8)^2-9.16=0 \Leftrightarrow (m^2-2)^2=9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2=3 \\ m^2-2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m^2=5$

$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ (thỏa điều kiện)

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$.

8.

▸ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow (2a+1)^2-2(a+3)>0 \Leftrightarrow 4a^2+2a-5>0$

$\Leftrightarrow a<\frac{-1-\sqrt{21}}{4}$ hay $a>\frac{-1+\sqrt{21}}{4}$ (*)

▸ Khi đó

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2a+1 \\ x_1-x_2=1 \\ x_1x_2=\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=a+1 \\ x_2=a \\ a(a+1)=\frac{a+3}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=a+1 \\ x_2=a \\ 2a^2+a-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy a thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ a = 1 hay $a=-\frac{3}{2}$.

9. ▸ Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k+2\neq 0 \\ \Delta'=2k^2+2k\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k\leqslant -1 \text{ hay } k\geqslant 0 \\ k\neq -2 \end{array}\right.$.

▸ Khi đó hai phương trình của phương trình đối xứng qua điểm $x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1+x_2=1 \Leftrightarrow \frac{2k}{k+2}=1 \Leftrightarrow 2k=k+2 \Leftrightarrow k=2$ (thỏa điều kiện)

Vậy k = 2 thỏa yêu cầu bài toán .

10. a) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (2m+3)^2-4(m^2+2m+2)\geq 0 \Leftrightarrow 4m+1\geq 0 \Leftrightarrow m\geqslant -\frac{1}{4}$.

Khi đó: $x_1x_2=m^2+2m+2$ và $x_1+x_2=2m+3$. Do đó:

$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)+5=(2m+3)^2-2(2m+3)+5$

$= 4m^2 + 8m + + 8 = 4(m^2 + 2m + 2) = 4x_1x_2$.

Do đó: $4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) + 5$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 15$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15 \Leftrightarrow (2m + 3)^2 - 2(m^2 + 2m + 2) = 15$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = -5$.

So sánh điều kiện ta được $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán .

c) Phương trình (1) có một nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 > 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 2(2m+3) + m^2 + 2m + 2 = 0 \\ x_2 = S - 2 > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ 2m + 3 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (nhận).}$$

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán .

***Vấn đề 7:* Ứng dụng của định lí Vi-ét để thiết lập một phương trình có hai nghiệm cho trước**

1. Ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{m-1} + \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{2m}{m^2-1}$; $x_1x_2 = \dfrac{1}{m^2-1}$.

Do đó x_1; x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - \dfrac{2m}{m^2-1} + \dfrac{1}{m^2-1} = 0$.

2. Ta có: $\begin{cases} x_1x_2 + x_1 + x_2 - 2m = 0 \\ x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)(1+m) - 2m - 2 = 0 \\ x_1x_2 = 2m - (x_1 + x_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 2m - 2 \end{cases}.$$

Do đó x_1; x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 2m - 2 = 0$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

***Vấn đề 1:* Giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối**

1. a) $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-x+5}{|x+1|}$ (1)

Điều kiện: $x \neq -1$ và $x \neq \dfrac{3}{2}$.

▸ $x < -1$: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-x+5}{-x-1} \Leftrightarrow 1 - x^2 = (5 - x)(2x - 3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 16 = 0$ (không có nghiệm vì vế trái > 0 khi $x < -1$).

▸ $x > 1$: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-x+5}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = (2x-3)(5-x)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 13x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \dfrac{7}{3}$.

Vậy (1) có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = \dfrac{7}{3}$.

b) $|2x+5| = x^2 + 5x + 1$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ 2x+5 = x^2+5x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+5 < 0 \\ -2x-5 = x^2+5x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ x^2+3x-4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x^2+7x+6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ x = 1 \vee x = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x = -1 \vee x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -6.$$

2. a) $|2mx - 3| = |4x - m - 1|$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2mx - 3 = 4x - m - 1 \\ 2mx - 3 = -4x + m + 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2m-4)x = 2 - m & (a) \\ (2m+4)x = m + 4 & (b) \end{bmatrix}$$

▸ Xét (a): * $m = 2$: (a) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

* $m \neq 2$: (a) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} = x_1$.

▸ Xét (b): * $m = -2$: (b) $\Leftrightarrow 0x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $m \neq -2$: (b) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m+4}{2m+4} = x_2$.

Ta có $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \dfrac{m+4}{2m+4} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m + 8 = -2m - 4 \Leftrightarrow m = -3$.

Kết hợp các trường hợp ta được:

* $m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

* $m = -2$ hoặc $m = -3$: $S = \{x_1\}$.

* $m \notin \{-2; 2; -3\}$: $S = \{x_1; x_2\}$

b) $|mx - x| = |mx - x + 2m - 2|$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} mx - x = mx - x + 2m - 2 \\ mx - x = -mx + x - 2m + 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m - 2 = 0 & (a) \\ (2m-2)x = 2 - 2m & (b) \end{bmatrix}$$

▸ Xét (a): * $m = 1$: (a) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

* $m \neq 1$: (a) $\Leftrightarrow x \in \varnothing$.

▸ Xét (b): * $m = 1$: (b) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

* $m \neq 1$: (b) $\Leftrightarrow x = -1$.

Kết luận: * $m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

* $m \neq 1$: $S = \{-1\}$.

c) $|mx-1| = 2x-2$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} mx-1 = 2x-2 \\ mx-1 = -2x+2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{ll} (m-2)x = -1 & (a) \\ (m+2)x = 3 & (b) \end{array}\right. \end{cases}$$

▸ $m = 2$: $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 0x = -1 \\ 4x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

▸ $m = -2$: $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -4x = -1 \\ 0x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

▸ $m \neq 2$ và $m \neq -2$: $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x_1 = \dfrac{1}{2-m} \vee x_2 = \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$.

Ta có: $\dfrac{1}{2-m} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2-m} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$

$\dfrac{3}{m+2} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{m+2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$

$\dfrac{1}{2-m} = \dfrac{3}{m+2} \Leftrightarrow m + 2 = 6 - 3m \Leftrightarrow m = 1.$

Do đó ta có: * $m < -2$ hay $m > 2$: $(3) \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $-2 < m < 1$: $(3) \Leftrightarrow x = x_2$.

* $m = 1$: $(3) \Leftrightarrow x = x_1 = x_2 = 1$.

* $1 < m < 2$: $(3) \Leftrightarrow x = x_1$.

Kết luận: * $m \leq -2$ hay $m \geq 2$: $S = \varnothing$.

* $-2 < m < 1$: $S = \{x_2\}$.

* $m = 1$: $S = \{1\}$.

* $1 < m < 2$: $S = \{x_1\}$.

d) $|3x+2m| = 2x-2m$ (4)

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2m \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x+2m = 2x-2m \\ 3x+2m = -2x+2m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ \left[\begin{array}{l} x = -4m \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Biện luận: * m = 0: (4) $\Leftrightarrow$ x = 0.

* m < 0: (4) $\Leftrightarrow$ x = –4m hoặc x = 0.

* m > 0: (4) $\Leftrightarrow$ x $\in \varnothing$.

Kết luận: * m = 0: S = {0}.

* m < 0: S = {–4m; 0}.

* m > 0: S = $\varnothing$.

3. a) $\dfrac{x^2-4x+4}{4x^2-4x+1}+\dfrac{|2x-4|}{|2x-1|}=3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-2}{2x-1}\right)^2+2\dfrac{|x-2|}{|2x-1|}=3$ (1)

Đặt $t=\left|\dfrac{x-2}{2x-1}\right| \geqslant 0$, (1) trở thành $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1.$

Thay vào cách đặt ta được: $\left|\dfrac{x-2}{2x-1}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=2x-1 \\ x-2=-2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy (1) có hai nghiệm là x = –1 hoặc x = 1.

b) $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right|-3\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right|=2$ (2)

Đặt $t=\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right|>0$, (2) trở thành $t-\dfrac{3}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=3.$

Thay vào cách đặt ta được: $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=3x+6 \\ 2x+1=-3x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$.

Vậy (1) có hai nghiệm là x = –1 hoặc $x=-\dfrac{7}{5}$.

c) $x^2+4x-3|x+2|-6=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-3|x+2|-10=0$ (3)

Đặt t = |x + 2| ≥ 0, (3) trở thành $t^2-3t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=5.$

Thay vào cách đặt ta được |x + 2| = 5 $\Leftrightarrow$ x = 3 hoặc x = –7.

Vậy (3) có hai nghiệm là x = 3 hoặc x = –7.

d) $4x^2+\dfrac{1}{x^2}+\left|2x-\dfrac{1}{x}\right|-6=0 \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^2+\left|2x-\dfrac{1}{x}\right|-2=0$ (4)

Đặt $t=\left|2x-\dfrac{1}{x}\right| \geq 0$, (4) trở thành $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1.$

Thay vào cách đặt ta được $\left|2x-\dfrac{1}{x}\right|=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-1=x \\ 2x^2-1=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-1=0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \vee x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \vee x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy (4) có 4 nghiệm là x = ± 1 hoặc $x=-\frac{1}{2}$.

4. a) $|mx-2|=|x+4|$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx-2=x+4 \\ mx-2=-x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-1)x=6 & (a) \\ (m+1)x=-2 & (b) \end{array}\right.$$

Ta có:

* m = 1: (a) vô nghiệm và (b) có nghiệm x = –1 ⇒ (1) có một nghiệm là x = –1.
* m = –1: (b) vô nghiệm và (a) có nghiệm x = –3 ⇒ (1) có một nghiệm là x = –3.
* m ≠ 1 và –1: (a) $\Leftrightarrow x=\frac{6}{m-1}=x_1$; (b) $\Leftrightarrow x=\frac{-2}{m+1}=x_2$.

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 6(m + 1) = -2(m - 1) \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất ⇔ m = ± 1 hoặc $m=-\frac{1}{2}$.

b) $|mx+x-2|=|2x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx+x-2=2x-2 \\ mx+x-2=-2x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-1)x=0 & (a) \\ (m-3)x=4 & (b) \end{array}\right.$ (2)

Ta có: * m = 1: (a) có nghiệm x ∈ ℝ ⇒ (2) có nghiệm là x ∈ ℝ.

* m = 3; (b) vô nghiệm và (a) có nghiệm x = 0 ⇒ (2) có một nghiệm là x = 0.
* m ≠ 1 và 3: (a) ⇔ x = 0; (b) $\Leftrightarrow x=\frac{4}{m-3} \neq 0$ ⇒ (2) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất ⇔ m = 3..

5. a) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$ (1)

▸ x ≤ –1 ⇒ x + 1 ≤ 0 và x < 0 nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x+1)}{-x(x-2)}=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=-2x^2+4x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

▸ –1 < x < 0 ⇒ x + 1 > 0 và x < 0 nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-1+(x+1)}{-x(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = -2x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

▸ $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0$ và $x > 0$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-1+(x+1)}{x(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$.

b) $\left|2x^2 - |x-1|\right| = x + 1$ (2)

▸ $x \geq 1$: $(2) \Leftrightarrow |2x^2 - x + 1| = x + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = x + 1$ (do $2x^2 - x + 1 > 0$ khi $x \geq 1$)

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận) hoặc $x = 0$ (loại).

▸ $x < 1$: $(2) \Leftrightarrow |2x^2 + x - 1| = x + 1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 1 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 1 = x + 1 \\ 2x^2 + x - 1 = -x - 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 2 = 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = -1 \vee x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{(do } x < 1).$$

Vậy phương trình (2) có ba nghiệm là: $x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

6. a) $x^2 - 2x - 2m|x-1| + 2m - 3 = 0$ (1)

Đặt $t = |x - 1| \geq 0$. Ta có (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m - 4 = 0$ (2).

Nhận xét:

* Mỗi nghiệm x của (1) tương ứng với một nghiệm $t \geq 0$ của (2).

* Mỗi nghiệm $t > 0$ của (2) cho hai nghiệm phân biệt của (1).

* Nghiệm $t = 0$ của (2) cho một nghiệm của (1).

Do đó: (1) có bốn nghiệm x phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm $t > 0$ phân biệt.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2 - 2m + 4 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 4 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (m-1)^2 + 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > 2$.

b) $|x^2 + 2mx + 1| = x + 1$ (I)

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2mx+1 = x+1 \\ x^2+2mx+1 = -x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x\left[x+2m-1\right] = 0 \\ x^2+(2m+1)x+2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \vee x = 1-2m \\ x^2+(2m+1)x+2 = 0 \ (II) \end{array}\right. \end{cases}$

Ta có: (I) có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow 1 - 2m = 0$ hoặc $1 - 2m < -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ hoặc $m > 1$.

- Khi $m = \frac{1}{2}$ thì (II) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ (I) có nghiệm $x = 0$.
- Khi $m > 1$ thì (II) có:

$\Delta = (2m + 1)^2 - 8 > 0$ (do $2m + 1 > 3$), $S = -2m - 1 < 0$ và $P = 2 > 0$

$\Rightarrow$ (II) có hai nghiệm âm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2 < 0$).

Lại có $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = P + S + 1 = -2m + 2 < 0$ nên $x_1 < -1 < x_2$.

$\Rightarrow$ (I) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = x_2 \Rightarrow m > 1$ (loại)

Vậy (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

***Vấn đề 2:* Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức**

1. a) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 4$ (1)

- Điều kiện: $x \neq -2$; $x \neq -1$ và $x \neq 1$.

(1) $\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} - 4 = \frac{x-7}{x-1} - \frac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-x-9}{x+2} = \frac{-x^2-3x-8}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow (-x - 9)(x^2 - 1) = (x + 2)(-x^2 - 3x - 8)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$ (nhận)

b) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} - \frac{x-5}{x+6}$ (2)

- Điều kiện: $x \neq -2$; $x \neq -3$; $x \neq -5$ và $x \neq -6$.
- (2) $\Leftrightarrow \frac{x+2-3}{x+2} - \frac{x+3-5}{x+3} = \frac{x+5-9}{x+5} - \frac{x+6-11}{x+6}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x+2}-\frac{5}{x+3}=\frac{9}{x+5}-\frac{11}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+3)-5(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{9(x+6)-11(x+5)}{(x+5)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{-2x-1}{(x+5)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x-1=0 \\ (x+2)(x+3)=(x+5)(x+6) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ 6x+24=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ hoặc $x=-4$.

So sánh với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-\frac{1}{2}$ hoặc $x=-4$.

c) $\frac{x+4}{x}+\frac{6x}{x+4}=5$ (3)

Điều kiện: $x\neq 0$ và $x\neq -4$

Đặt $t=\frac{x+4}{x}$, ta được:

$$(3)\Leftrightarrow t+\frac{6}{t}=5 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+4}{x}=2 \\ \dfrac{x+4}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4=2x \\ x+4=3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right. \text{(nhận).}$$

2. a) $(1)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 2 \\ (m^2+1)x-10=(m+1)(x-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 2 \\ (m^2-m)x=-2m+8 \end{array}\right. \quad (1a)$

- $m^2-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$ và $m\neq 1$:

$(1a)\Leftrightarrow x=\frac{-2m+8}{m^2-m}=x_1$.

Ta có $x_1=2\Leftrightarrow 2(m^2-m)=-2m+8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Do đó: * $m=\pm 2$: (1) vô nghiệm.

* $m\neq 2$ và -2: (1) có nghiệm $x=x_1$.

- $m=0$: $(1a)\Leftrightarrow 0x=0\Rightarrow (1a)$ vô nghiệm $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- $m=1$: $(1a)\Leftrightarrow 0x=6\Rightarrow (1a)$ vô nghiệm $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận: * $m\in\{0;1;-2;2\}$: $S=\varnothing$.

* $m \notin \{0; 1; -2; 2\}$: $S = \{x_1\}$.

b) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+3)x-3=(2m+3)(x-1) \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (m^2-2m)x=-2m \end{cases}$ (2a)

▸ $m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 2$:

(2a) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-2m}{m^2-2m} = \dfrac{-2}{m-2} = x_0 \neq 1$ (do $m \neq 0$)

Do đó (2) có nghiệm $x = x_0$.

▸ $m = 0$: (2a) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (2) có nghiệm $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

▸ $m = 2$: (2a) $\Leftrightarrow 0x = -4 \Leftrightarrow x \in \varnothing \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Kết luận: * $m = 0$: $S = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* $m = 2$: $S = \varnothing$.

* $m \neq 0$ và $m \neq 2$: $S = \{x_0\}$.

c) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ m^2x - m^2 = mx - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (m^2-m)x = m^2 - m \end{cases}$ (3a)

▸ $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 1$:

(3a) $\Leftrightarrow x = 1$ (loại) $\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

▸ $m = 0$ hay $m = 1$: (3a) $\Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Vậy: * $m = 0$ hoặc $m = 1$: $S = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* $m \neq 0$ và $m \neq 1$: $S \in \varnothing$.

d) (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq m \\ (x-m)^2 + (x-1)^2 = 2(x-m)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq m \\ (-m+1)^2 = 0 \end{cases}$ (4a)

▸ $m = 1$: (4a) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (4) có nghiệm $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

▸ $m \neq 1$: (4a) vô nghiệm $\Rightarrow$ (4) vô nghiệm.

Vậy: * $m = 1$: $S = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* $m \neq 1$: $S \in \varnothing$.

3. a) $\dfrac{m(x+1)}{x-1} = 2$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx + m = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (m-2)x = -m - 2 \end{cases}$ (1a)

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1a) vô nghiệm hoặc (1a) có nghiệm duy nhất bằng 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ -m-2 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ (m-2).1 = -m-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = 0$.

Vậy (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

b) $\dfrac{x-m}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}=2$ (2)

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 0\\ x(x-m)+(x-2)^2=2x(x-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 0\\ -mx+4=0\end{cases}\quad(2a)$$

(2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2a) vô nghiệm hay (2a) có nghiệm duy nhất bằng 2 hay bằng 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\ 4\neq 0\end{cases}\vee\begin{cases}m\neq 0\\ -2m+4=0\end{cases}\Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = 2.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ m = 0 hay m = 2.

c) $\dfrac{x+1}{x-m+1}=\dfrac{x}{x+m+2}$ (3)

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq m-1\\ x\neq -m-2\\ (x+1)(x+m+2)=x(x-m+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq m-1\\ x\neq -m-2\\ (2m+2)x+m+2=0\end{cases}\quad(3a)$$

Do đó: (3) vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ (3a) vô nghiệm hay (3a) có nghiệm duy nhất bằng m – 1 hay bằng –m – 2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2=0\\ m+2\neq 0\end{cases}\vee\begin{cases}2m+2\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}(2m+2)(m-1)+m+2=0\\ (2m+2)(-m-2)+m+2=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } \begin{cases}m\neq -1\\ 2m^2+m=0 \text{ hay } -2m^2-5m-2=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ m = –1 hoặc m = 0 hoặc m = –2 hoặc $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\in\{-1;0;-2;-\dfrac{1}{2}\}$.

4. a) $x\sqrt{x+1}-\dfrac{x^2+x+2m}{\sqrt{x+1}}=m\sqrt{x+1}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ x(x+1)-(x^2+x+2m)=m(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ mx=-3m\end{cases}\quad(1a)$$

- m = 0: (1a) $\Leftrightarrow$ 0x = 0 $\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ (1) có nghiệm $x>-1\Rightarrow$ m = 0 (nhận).
- $m\neq 0$: (1a) $\Leftrightarrow$ x = –3 (loại) $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm $\Rightarrow m\neq 0$ (loại)

Vậy (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ m = 0.

b) $\dfrac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}$ (2)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2>0 \\ (2m+1)x+3=(2m+3)x+m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ 2x=5-m \end{cases}$ (2a)

(2a) luôn có nghiệm là $x = \dfrac{5-m}{2}$.

Do đó (2) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 < \dfrac{5-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -4 < 5-m < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 9$.

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < m < 9$.

5. a) $\dfrac{x+2}{x-m} = \dfrac{x+1}{x-1}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq 1 \\ (x+2)(x-1)=(x+1)(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq 1 \\ mx=2-m \end{cases}$ (1a)

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1a) có nghiệm duy nhất khác m và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m.m \neq 2-m \\ m.1 \neq 2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2+m-2 \neq 0 \\ 2m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \notin \{0; 1; -2\}$.

b) $\dfrac{m}{mx+3} = 2$ (2)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} mx+3 \neq 0 \\ m = 2mx+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+3 \neq 0 \\ 2mx = m-6 \end{cases}$ (2a)

(2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2a) có nghiệm duy nhất thỏa $mx \neq -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2(-3) \neq m-6 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Vấn đề 3: phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

1. a) $\sqrt{2x^2-5x-5} = \sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ 2x^2-5x-5=x^2-9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x=1 \vee x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy } S = \{4\}.$$

b) $\sqrt{6x+4}-\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4 \geqslant 0 \\ x-2 \geqslant 0 \\ \sqrt{6x+4}=\sqrt{x-2}+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 6x+4=x-2+8\sqrt{x-1}+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 8\sqrt{x-2}=5x-10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 64(x-2)=25x^2-100x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 25x^2-164x+208=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x=2 \vee x=\dfrac{114}{25} \end{cases} \Leftrightarrow$ x = 2 hoặc x = $\dfrac{114}{25}$. Vậy S = {2; $\dfrac{114}{25}$}.

c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+10}=\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x+7}$ (*)

Điều kiện: x ≥ 1.

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{2x-2}+\sqrt{2x+10}$

$\Leftrightarrow 4x+8+2\sqrt{(x+1)(3x+7)}=4x+8+2\sqrt{(2x-2)(2x+10)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3x+7)}=\sqrt{(2x-2)(2x+10)}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 7 = 4x^2 + 16x - 20$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$

$\Leftrightarrow$ x = –9 (loại) hoặc x = 3 (nhận).

Vậy S = {3}.

d) $\sqrt{4+6x-x^2}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geqslant 0 \\ 4+6x-x^2=(4-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 2x^2-14x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ x=1 \vee x=7 \end{cases} \Leftrightarrow$ x = 1. Vậy S = {1}.

2. a) $x^2 + \sqrt{x^2-3x+5}=3x+7$ (1)

Đặt t = $\sqrt{x^2-3x+5} \geq 0$.

(1) $\Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow$ t = –4 (loại) hoặc t = 3 (nhận).

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+5}=3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ x = –1 hoặc x = 4.

Vậy S = {–1; 4}.

b) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$ (2)

Cách 1: Đặt $u=\sqrt{3x^2-2x+15}$; $v=\sqrt{3x^2-2x+8}$, ta được:

$$\begin{cases} u+v=7 \\ u^2-v^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=7 \\ u-v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-2x+15}=4 \\ \sqrt{3x^2-2x+8}=3 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x+15} \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow t+\sqrt{t^2-7}=7 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-7}=7-t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-t \geqslant 0 \\ t^2-7=49-14t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x+15}=4 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

c) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ (3)

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}$, $t \geq 0$.

Ta có $t^2=4x-3+2\sqrt{(3x-2)(x-1)}=4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

Suy ra $4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}=t^2-6$.

Do đó phương trình (3) trở thành:

$t=t^2-6 \Leftrightarrow t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t=3$ (nhận) hay $t=-2$ (loại)

Thay $t=3$ vào cách đặt ta được: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$ (3a)

Ta có: (3a) $\Leftrightarrow 4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}=9$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x \geqslant 0 \\ 3x^2-5x+2=36-24x+4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x^2-19x+34=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x=2 \text{ hay } x=17 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

So sánh điều kiện ta được (3) có nghiệm duy nhất là $x=2$.

d) $\sqrt{x^2+5}=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}} \Rightarrow \sqrt{(x^2+5)(x^2-3)}=x\sqrt{x^2-3}+1$

$\Rightarrow x^4+2x^2-15=x^2(x^2-3)+1+2x\sqrt{x^2-3}$

$\Rightarrow 2x\sqrt{x^2-3}=5x^2-16$

$\Rightarrow 4x^2(x^2-3)=25x^4-160x^2+256$

$\Rightarrow 21x^4-148x^2+256=0$

$\Rightarrow x^2=4$ hoặc $x^2=\dfrac{64}{21}\Rightarrow x=\pm 2$ hoặc $x=\pm\dfrac{8}{\sqrt{21}}$.

Thử lại ta được $x=2$ hoặc $x=-\dfrac{8}{\sqrt{21}}$ là nghiệm của phương trình.

3. a) $x\sqrt{1-x}+2(1-x)=x^2$ (1)

Đặt $t=\sqrt{1-x}\geq 0$, ta được:

$(1)\Leftrightarrow xt+2t^2=x^2\Leftrightarrow 2t^2+xt-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-t\\x=2t\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=-x\\2\sqrt{1-x}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x\geqslant 0\\1-x=x^2\end{array}\right.$ hay $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\4(1-x)=x^2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 0\\x^2+x-1=0\end{array}\right.$ hay $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\x^2+4x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hay $x=-2+2\sqrt{2}$.

b) $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(1+x)$ (2)

Đặt $t=\sqrt{x+1}\geq 0$. Ta được:

$(2)\Leftrightarrow 4x^2+12xt=27t^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9y=-2x\\3y=2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9\sqrt{x+1}=-2x\\3\sqrt{x+1}=2x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2x\geqslant 0\\81(x+1)=4x^2\end{array}\right.$ hay $\left\{\begin{array}{l}2x\geqslant 0\\9(x+1)=4x^2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 0\\4x^2-81x-81=0\end{array}\right.$ hay $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\4x^2-9x-9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{81-9\sqrt{97}}{8}$ hay $x=3$.

4. a) $\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3x^2-5x-1}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}+\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-2}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}+\dfrac{-3x+6}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0$

$\Leftrightarrow(-x+2)\left[\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}\right]=0$

$\Leftrightarrow -x+2=0$ (vì biểu thức trong dấu ngoặc vuông luôn dương)

$\Leftrightarrow x=2$.

b) $\sqrt{22-3x}+4\sqrt{x+2}=x^2+8$ (2)

Điều kiện: $-2\le x\le\dfrac{22}{3}$.

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{22-3x}+\left(\dfrac{x-14}{3}\right)+4\sqrt{x+2}-\left(\dfrac{4x+16}{3}\right)-\left(x^2-x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{22-3x}+x-14+12\sqrt{x+2}-4x-16-3(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9(22-3x)-(x-14)^2}{3\sqrt{22-3x}-x+14}+\dfrac{4\left[9(x+2)-(x+4)^2\right]}{3\sqrt{x+2}+x+4}-3(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+x+2}{3\sqrt{22-3x}-x+14}+\dfrac{4\left[-x^2+x+2\right]}{3\sqrt{x+2}+x+4}-3(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow (-x^2+x+2)\left[\dfrac{1}{3\sqrt{22-3x}-x+14}+\dfrac{4}{3\sqrt{x+2}+x+4}+3\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+x+2=0\\ \dfrac{1}{3\sqrt{22-3x}-x+14}+\dfrac{4}{3\sqrt{x+2}+x+4}+3=0 \quad (2)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=2$ hay $x=-1$. (Do vế trái (2) luôn dương nên (2) vô nghiệm)

5. a) $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$ (1)

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ 2x^2-6x+m=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-4x-1+m=0\ (2)\end{cases}$.

Điều kiện:

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa $1\le x_1<x_2$ (3)

Cách 1:

$(3)\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ (x_1-1)+(x_2-1)>0\\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}5-m>0\\ S-2>0\\ P-S+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<5\\ 4-2>0\\ m-1-4+1\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m<5\\ m\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow 4\le m<5.$

Cách 2:

$(2)\Leftrightarrow m=-x^2+4x+1=f(x)$ (*)

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

Đường thẳng d: $y=m$ và parabol (P): $y=f(x)$.

Ta có bảng biến thiên của f(x) trên $[1;+\infty)$ như sau:

x	1		2		$+\infty$
f(x)	4	↗	5	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

(3)$\Leftrightarrow$ d và phần đồ thị (P) với $x \geq 1$ có đúng hai giao điểm

$\Leftrightarrow 4 \leq m < 5$.

b) $\sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x+3}$ (I)

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x^2 - x + m = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x^2 - 2x - 3 + m = 0 \end{cases} \text{(II)}$$

Điều kiện:

(I) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (II) có hai nghiệm phân biệt thỏa $3 \leq x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + 3) + (x_2 + 3) > 0 \\ (x_2 + 3)(x_2 + 3) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4 > 0 \\ S + 6 > 0 \\ P + 3S + 9 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ 2 + 6 > 0 \\ m + 3 + 3.2 + 9 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -18 \leq m < 4$.

Vấn đề 4: Một số phương trình bậc bốn đưa về phương trình bậc hai

1. a) $(x - \sqrt{2})^4 - 3(x - \sqrt{2})^2 - 4 = 0$ (2)

Đặt $t = (x - \sqrt{2})^2 \geq 0$, ta được:

(2) $\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 4$ (nhận).

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 = 4 \Leftrightarrow x = = \pm 2 + \sqrt{2}$.

b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 120$ (3)

(3) $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3) = 120 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$.

Đặt $t = x^2 - 5x + 4$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow t(t + 2) = 120 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 120 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 10 \\ x^2 - 5x + 4 = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 16 = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

2. a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (nhận) hoặc $t = -2$ (loại)

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

b) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ (2)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được:

(2) $\Leftrightarrow 4t^2 + 7t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$ (nhận) hoặc $t = -2$ (loại)

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.

c) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ (3)

Đặt $t = x^3$, ta được:

(3) $\Leftrightarrow t^2 + 19t - 216 = 0 \Leftrightarrow t = 8$ hoặc $t = -27$

$\Leftrightarrow x^3 = 8$ hoặc $x^3 = -27 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -3$.

d) $x^2(x-1)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ (4)

Đặt $t = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{4}$.

(4) $\Leftrightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ hoặc $t = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 6 \\ x^2 - x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \vee x = -2 \\ x = 2 \vee x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy (4) có 4 nghiệm là $x = -2$; $x = -1$; $x = 2$; $x = 3$.

3. a) $(x+3)^4 + (x-1)^4 = 256$ (1)

Đặt $t = x + 1$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow (t+2)^4 + (t-2)^4 = 256$

$\Leftrightarrow t^4 + 4t^3.2 + 6t^2.2^2 + 4t.2^3 + 2^4 + t^4 - 4t^3.2 + 6t^2.2^2 - 4t.2^3 + 2^4 = 256$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 48t^2 - 224 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 4 \\ t^2 = -28 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

b) $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 82$. (2)

Đặt $t = 2x - 4 \Rightarrow 2x = t + 4$, ta được:

(2) $\Leftrightarrow (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2$

$\Leftrightarrow t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 80 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 4 \\ t^2 = -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

4. a) $(x+1)(x-2)(x-5)(x-8) = 280$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (x+1)(x-8)(x-2)(x-5) = 280$

$\Leftrightarrow (x^2 - 7x - 8)(x^2 - 7x + 10) = 280$.

Đặt $t = x^2 - 7x - 8$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow t(t+18) = 280 \Leftrightarrow t^2 + 18t - 280 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -28 \\ t = 10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 7x - 8 = -28 \\ x^2 - 7x - 8 = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 7x + 20 = 0 \\ x^2 - 7x - 18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 9 \end{array}\right.$$

b) $(x^2 - 4)(x+1)(x+5) - 160 = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow (x-2)(x+5)(x+1)(x+2) - 160 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 10)(x^2 + 3x + 2) - 160 = 0$.

Đặt $t = x^2 + 3x - 10$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow t(t+12) - 160 = \Leftrightarrow t^2 + 12t - 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -20 \\ t = 8 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 10 = -20 \\ x^2 + 3x - 10 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 10 = 0 \\ x^2 + 3x - 18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

c) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 4x - 5) - 112 = 0$ (3)

$(3) \Leftrightarrow (x-4)(x+2)(x+1)(x-5) - 112 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+1)(x+2)(x-5) - 112 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) - 112 = 0$

Đặt $t = x^2 - 3x - 4$, ta được:

$(3) \Leftrightarrow t(t-6) - 112 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 112 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -8 \\ t = 14 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 = -8 \\ x^2 - 3x - 4 = 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 4 = 0 \\ x^2 - 3x - 18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

d) $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6) + 96 = 0$. (4)

$(4) \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-3)(x+6) + 96 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) + 96 = 0$

Đặt $t = x^2 + 3x + 2$, ta được:

$(4) \Leftrightarrow t(t-20) + 96 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 12 \\ t = 8 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 = 12 \\ x^2 + 3x + 2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x^2 + 3x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \vee x = -5 \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$.

5. a) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ (1)

- $x = 0$: $(1) \Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lí)
- $x \neq 0$: Chia hai vế của (1) cho x^2, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2 - 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 4$ hoặc $x + \dfrac{1}{x} = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ hoặc $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ hoặc $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = 2 \pm \sqrt{3}$ hoặc $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$ (2)

- $x = 0$: (2) $\Leftrightarrow 4 = 0$ vô lí.
- $x \neq 0$: (2) $\Leftrightarrow x^2 - x - 10 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$. Đặt $t = x - \dfrac{2}{x}$.

6. a) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$ (1)

- $x = 0$: (1) $\Leftrightarrow 4.4 = 0$ (vô lí).
- $x \neq 0$: Chia hai vế của (1) cho x^2, ta được:

$(1) \Leftrightarrow \left(x - 2 + \dfrac{4}{x}\right)\left(x + 3 + \dfrac{4}{x}\right) = 14$.

Đặt $t = x + \dfrac{4}{x}$, ta được: (1) trở thành $(t - 2)(t + 3) = 14 \Leftrightarrow t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -5 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow x + \dfrac{4}{x} = -5$ hoặc $x + \dfrac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ hoặc $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -5$ hoặc $x = 2$.

Vậy (1) có tập nghiệm là $S = \{-5; -1; 2\}$.

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$ (2)

$(2) \Leftrightarrow (x + 2)(x + 12)(x + 3)(x + 8) = 4x^2$

$\Leftrightarrow (x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$.

- $x = 0$: (2) $\Leftrightarrow 24.24 = 0$ (vô lí).
- $x \neq 0$: Chia hai vế của (2) cho x^2, ta được:

$(1) \Leftrightarrow \left(x + 14 + \dfrac{24}{x}\right)\left(x + 11 + \dfrac{24}{x}\right) = 4$.

Đặt $t = x + \dfrac{24}{x}$, ta được:

(1) trở thành $(t + 14)(t + 11) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 25t + 150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -15 \\ t = -10 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow x + \dfrac{24}{x} = -15$ hoặc $x + \dfrac{24}{x} = -10 \Leftrightarrow x^2 + 15x + 24 = 0$ hoặc $x^2 + 10x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$ hoặc $x = -4$ hoặc $x = -6$.

Vậy (1) có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{-15 - \sqrt{129}}{2}; \dfrac{-15 + \sqrt{129}}{2}; -4; -6\right\}$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Vấn đề 1: **Giải và biện luận hệ phương trình hai ẩn** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad (2) \end{cases}$

1.

a) $\begin{cases} \sqrt{5}x + y = 6 \\ x - \sqrt{5}y = -6 \end{cases}$ (1)

$D = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = -6;\ D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = 6 - 6\sqrt{5};\ D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 6\sqrt{5}.$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất là $x = \sqrt{5} - 1;\ y = \sqrt{5} + 1$.

b) $\begin{cases} 2x - \dfrac{1}{3}y = 1 \\ 3x + \dfrac{5}{2}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - y = 3 \\ 6x + 5y = 4 \end{cases}$ (2)

$D = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 36;\ D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 19;\ D_y = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 6.$

Vậy (2) có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{19}{36};\ y = \dfrac{1}{6}$.

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{5}y = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 12y = 45 \\ 40x + 12y = 45 \end{cases}$ (3)

$D = \begin{vmatrix} 10 & -12 \\ 40 & 12 \end{vmatrix} = 600;\ D_x = \begin{vmatrix} 45 & -12 \\ 45 & 12 \end{vmatrix} = 1080;\ D_y = \begin{vmatrix} 10 & 45 \\ 40 & 45 \end{vmatrix} = -1350$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{9}{5};\ y = \dfrac{135}{60} = -\dfrac{9}{4}$.

2. a) $\begin{cases} 2x^2 + 2x - \sqrt{y-1} = 3 \\ x^2 + x + 2\sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$ (1)

Đặt $u = x^2 + x$ và $v = \sqrt{y-1}$.

(1) trở thành $\begin{cases}2u-v=3\\u+2v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x=2\\\sqrt{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\vee x=-2\\y=2\end{cases}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là (1; 2), (–2; 2).

b) $\begin{cases}\dfrac{3x-6}{y+1}-\dfrac{x}{y-2}=1\\\dfrac{x-2}{y+1}+\dfrac{3x}{y-2}=7\end{cases}$ (2)

Đặt $u=\dfrac{x-2}{y+1}$ và $v=\dfrac{x}{y-2}$.

(1) trở thành $\begin{cases}3u-v=1\\u+3v=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{y+1}=1\\\dfrac{x}{y-2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\x-2y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$.

Vậy hệ có một nghiệm là (10; 7).

c) $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{y+7}{y+3}=5\\\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{3y+1}{y+3}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+\dfrac{1}{x-2}+1+\dfrac{4}{y+3}=5\\1+\dfrac{3}{x-2}+3-\dfrac{8}{y+3}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{y+3}=2\\\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{8}{y+3}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}=1\\\dfrac{1}{y+3}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\y+3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm là (3; 1).

d) $\begin{cases}3(x+y)+2(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y})=6\\3(x-y)+2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\dfrac{2}{x}+3y-\dfrac{2}{y}=6\\3x+\dfrac{2}{x}-(3y-\dfrac{2}{y})=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\dfrac{2}{x}=5\\3y-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-5x+2=0\\3y^2-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\vee x=\dfrac{2}{3}\\y=1\vee y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(1;1),\left(1;-\dfrac{2}{3}\right),\left(\dfrac{2}{3};1\right),\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

3. a) $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$ (1)

Ta có: $D = m^2 - 1$; $D_x = \begin{vmatrix} m & 1 \\ m^2 & m \end{vmatrix} = 0$; $D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m(m^2 - 1)$.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -1$:

Hệ có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{D_x}{D} = 0$; $y = \dfrac{D_y}{D} = m$.

* $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$:

+ $m = 1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 - x$

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm dạng $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y = 1 - x$.

+ $m = -1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$.

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm dạng $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y = x - 1$.

Kết luận:

* $m \neq 1$ và $m \neq -1$: $S = \{(0; m)\}$.
* $m = 1$: $S = \{(x; 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$.
* $m = -1$: $S = \{(x; x - 1), x \in \mathbb{R}\}$.

b) $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$ (2)

Ta có: $D = 1 - m^2$; $D_x = 1 - m^3$; $D_y = m^2 - m$.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -1$:

Hệ có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1 - m^3}{1 - m^2} = \dfrac{1 + m + m^2}{1 + m}$; $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-m}{m + 1}$.

* $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$:

+ $m = 1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 - x$

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm dạng $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y = 1 - x$.

+ $m = -1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

Kết luận: * $m \neq 1$ và $m \neq -1$: $S = \left\{\left(\dfrac{m^2 + m + 1}{m + 1}; \dfrac{-m}{m + 1}\right)\right\}$.

* $m = 1$: $S = \{(x; 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$.
* $m = -1$: $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a - 3 \end{cases}$ (3)

Ta có: $D = a^2 - 3a = a(a-3)$; $D_x = 2a^2 - 6a = 2a(a-3)$; $D_y = a - 3$.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $a \neq 3$:

Hệ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{D_x}{D} = 2$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a}$.

* $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hay $a = 3$:

+ $a = 3$: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y + 1$

$\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm dạng $(x; y)$ với $y \in \mathbb{R}$ và $x = 3y + 1$.

+ $a = 0$: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y = -1 \\ 0x - 0y = -3 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

Kết luận: * $a \neq 0$ và $m \neq 3$: $S = \{(2; 1/a)\}$.

* $a = 3$: $S = \{(3y + 1; y), y \in \mathbb{R}\}$.

* $a = 0$: $S = \varnothing$.

d) $\begin{cases} ax - y = b \\ bx + y = a \end{cases}$ (4)

Ta có: $D = a + b$; $D_x = b + a$; $D_y = a^2 - b^2$.

Biện luận:

* $D \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -a$: (4) có nghiệm duy nhất là $x = 1$; $y = a - b$.

* $D = 0 \Leftrightarrow b = -a$:

(4) $\Leftrightarrow \begin{cases} ax - y = -a \\ -ax + y = -a \end{cases} \Leftrightarrow y = ax + a$.

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y = ax + a$.

Kết luận: + $b \neq -a$: $S = \{(1; a - b)\}$.

+ $b = -a$: $S = \{(x; ax + a), x \in \mathbb{R}\}$.

4. a) $\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + ay = 3a^2 \end{cases}$ (1)

Ta có: $D = a^2 - 1$.

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

Khi $a = 1$, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 - x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$ (loại)

Khi $a = -1$, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow a = -1$ (nhận).

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow a = -1$.

b) $\begin{cases}(m-2)x-y=m+2\\(m+1)x+2y=m-5\end{cases}$ (2)

Ta có: D = 2(m – 2) + m + 1 = 3m – 3.

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ D = 0 $\Rightarrow$ m = 1.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}-x-y=3\\2x+2y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-3\\x+y=-2\end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ m = 1 (nhận)

Vậy hệ (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ m = 1.

5. a) $\begin{cases}mx+2y=m\\(m-1)x+(m-1)y=1\end{cases}$ (1)

Ta có: D = m(m – 1) – 2(m – 1) = (m – 1)(m – 2).

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ D = 0 $\Rightarrow$ m = 1 hay m = 2.

Khi m = 1, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=1\\0x+0y=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Khi m = 2, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=2\\x+y=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ y = 1 – x $\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

Vậy hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ m = 1. Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 1.

b) $\begin{cases}3x-my=1\\-mx+3y=m-4\end{cases}$ (2)

Ta có: D = $9 - m^2$.

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ D = 0 $\Rightarrow$ m = 3 hay m = –3.

Khi m = –3, (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}3x+3y=1\\3x+3y=-7\end{cases}$ $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Khi m = 3, (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}3x-3y=1\\-3x+3y=-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

Vậy hệ (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ m = –3. Do đó (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ m $\neq$ –3.

6. a) $\begin{cases}(m+5)x+(2m+3)y=3m+2\\(3m+10)x+(5m+6)y=2m+4\end{cases}$ (1)

Ta có: $D = \begin{vmatrix}m+5 & 2m+3\\3m+10 & 5m+6\end{vmatrix}$ = m(2 – m);

$D_x = \begin{vmatrix}3m+2 & 2m+3\\2m+4 & 5m+6\end{vmatrix}$ = m(11 + 14m);

$D_y = \begin{vmatrix}m+5 & 3m+2\\3m+10 & 2m+4\end{vmatrix}$ = –m(7 + 22m).

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 2$.

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ là: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{14m+11}{2-m} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{22m+7}{m-2} \end{cases}$.

b) $\begin{cases} mx^2 - 2y = m \\ x^2 + (m-3)y = m-1 \end{cases}$ (2)

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & m-3 \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$;

$D_x = \begin{vmatrix} m & -2 \\ m-1 & m-3 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$;

$D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$.

Hệ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 2$.

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ (2) là: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+1}{m-1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m}{m-1} \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x - 2y = m \\ |mx - my| = |m-1| \end{cases}$ (3)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + m \\ |m(2y+m) - my| = |m-1| \end{cases}$ (3a)

Ta có (3a) $\Leftrightarrow |my + m^2| = |m-1| \Leftrightarrow (my + m^2)^2 = (m-1)^2$.

$\Leftrightarrow m^2y^2 + 2m^3y + m^4 - m^2 + 2m - 1 = 0$ (3b).

Hệ (3) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (3b) có nghiệm y duy nhất

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ 2m^3 \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m^2 \neq 0 \\ m^6 - m^2(m^4 - m^2 + 2m - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2(m-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó (3) trở thành $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ |x - y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$.

d) $\begin{cases} x+my=1 \\ |mx+y|=2m \end{cases}$ (4)

Ta có: (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-my \\ |m(1-my)+y|=2m \ (4a) \end{cases}$

Ta có: * m < 0 thì (4a) vô nghiệm.

* m ≥ 0 thì (4a) $\Leftrightarrow |m-(m^2-1)y|=2m$

$\Leftrightarrow (m^2-1)^2y^2-2m(m^2-1)y+m^2=4m^2$

$\Leftrightarrow (m^2-1)^2y^2-2m(m^2-1)y-3m^2=0$ (4b)

Hệ (4) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (4b) có nghiệm y duy nhất

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} hay \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ 2m(m^2-1)\neq 0 \end{cases} hay \begin{cases} m^2-1\neq 0 \\ 4m^2(m^2-1)^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1\neq 0 \\ m=0 \vee m=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=0.$

Vậy (4) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = 0.

Khi đó (4) trở thành $\begin{cases} x+0y=1 \\ |0x+y|=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ x = 1 và y = 0.

7. a) $\begin{cases} a^2x-by=a^2-b \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$ (1)

Cách 1: Khi a = b = 0 thì hệ (1) vô nghiệm.

Khi a, b không đồng thời bằng 0 thì ta có:

$D=-a^2b^2+b^2=b^2(1-a^2).$

Hệ (1) có vô số nghiệm $\Rightarrow D=0 \Rightarrow b=0$ hoặc $a=\pm 1$.

- Khi b = 0 thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2x=a^2 \\ 0=2 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm với mọi a.

- Khi $a=\pm 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-by=1-b \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-by=1-b \\ b(x-by)=2+4b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-by=1-b \\ b(1-b)=2+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-by=1-b \\ b^2+3b+2=0 \end{cases}.$

Ta có: + Nếu b = –1 và b ≠ –2 thì hệ (1)vô nghiệm.

+ Nếu b = –1 hay b = –2 thì hệ (1) có vô số nghiệm.

Vậy hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=-1 \end{cases} hay \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=-2 \end{cases}.$

Cách 2:

Khi a = b = 0 thì hệ (1) vô nghiệm.

Khi a, b không đồng thời bằng 0 thì ta có:

$D = -a^2b^2 + b^2 = b^2(1 - a^2)$.

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 - b & -b \\ 2 + 4b & -b^2 \end{vmatrix} = -a^2b^2 + b^3 + b(2 + 4b)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a^2 & a^2 - b \\ b & 2 + 4b \end{vmatrix} = a^2(2 + 4b) - b(a^2 - b).$$

Hệ (1) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2(1-a^2) = 0 \\ -a^2b^2 + b^3 + b(2+4b) = 0 \\ a^2(2+4b) - b(a^2 - b) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 0 = 0 \\ 2a^2 = 0 \end{cases} \quad (*) \text{ hoặc } \begin{cases} a = \pm 1 \\ -b^2 + b^3 + b(2+4b) = 0 \\ (2+4b) - b(1-b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b^3 + 3b^2 + 2b = 0 \\ b^2 + 3b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = -1 \vee b = -2 \end{cases}.$$

(***Chú ý:*** (*) cho a = b = 0 không thỏa)

Vậy hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = -1 \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = a^2 \\ (a+b)x + (a-b)y = a + 1 \end{cases}$ (2)

Khi a = b = 0 thì hệ vô nghiệm.

Khi a, b không đồng thời bằng 0 thì ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a^2 - b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix} = (a - b)(a^2 + b^2) - (a + b)(a^2 - b^2) = -2ab(a - b).$$

Hệ (2) vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a = 0$ hay $b = 0$ hay $b = a$.

* Khi a = 0 thì $b \neq 0$ nên (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} b^2x - b^2y = 0 \\ bx - by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

* Khi b = 0 thì $a \neq 0$ nên

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2x + a^2y = a^2 \\ ax + ay = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ a(x + y) = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ a = a + 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

* Khi $b = a \neq 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2x = a^2 \\ 2ax = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+1) = a^2 \\ 2ax = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = a \\ 2ax = a+1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị a, b nào để hệ (2) có vô số nghiệm.

8. $\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 13 - a + 2b \end{cases}$ (1)

Ta có: $x = 1; y = 3$ là một nghiệm của (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 3b = 2a - b \\ c + 1 + 3c = 13 - a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 4c = 12 + 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = b + 3 \end{cases}$$

Do đó (1) trở thành $\begin{cases} 2bx + by = 5b \\ (b+4)x + (b+3)y = 4(13+4b) \end{cases}$ (1a)

Ta có $D = \begin{vmatrix} 2b & b \\ b+4 & b+3 \end{vmatrix} = 2b^2 + 6b - b^2 - 4b = b^2 + 2b.$

Hệ (1) có vô số nghiệm $\Rightarrow$ (1a) có vô số nghiệm

$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow b = 0$ hay $b = -2$.

- Khi $b = 0$ thì $a = 0$ và (1a) trở thành

$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 4x + 3y = 52 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ (1a) có vô số nghiệm.

- Khi $b = -2$ thì (1a) trở thành:

$$\begin{cases} -4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm.}$$

Vậy hệ (1) có vô số nghiệm và đồng thời (1; 3) là một nghiệm $\Leftrightarrow a = b = 0$ và $c = 3$.

9. $\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m-1)x + (m-1)y = 1 \end{cases}$ (1).

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - m^2 = -m(m-2).$$

TH1: $D = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = 2$:

- $m = 2 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ Hệ (1) có vô số nghiệm thỏa $x + y = 1$ nên (1) có vô số nghiệm nguyên (x; y) với $x \in \mathbb{Z}$ và $y = 1 - x$.

‣ $m = 1 \Rightarrow D = 0, D_x \neq 0 \Rightarrow$ Hệ (1) vô nghiệm.

TH2: $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 2$:

Hệ (1) có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \dfrac{m+1}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1} \\ y = \dfrac{-m}{m-1} = -1 - \dfrac{1}{m-1} \end{cases}$.

Do đó để $x, y, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m - 1 \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

10. $\begin{cases} ax + y = 3b \\ x + ay = b^2 + b \end{cases}$ (1)

Hệ có nghiệm với mọi a $\Rightarrow$ Hệ có nghiệm khi $a = 1$.

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3b \\ x + y = b^2 + b \end{cases}$ có nghiệm $\Rightarrow 3b = b^2 + b \Rightarrow b^2 - 2b = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 2 \end{array}\right.$.

Thử lại:

‣ Với $b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ luôn có nghiệm (0; 0) với mọi a.

‣ Với $b = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y = 6 \\ x + ay = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - ax \\ x + a(6 - ax) = 6 \end{cases}$ (1a)

Ta có (1a) $\Leftrightarrow (1 - a^2)x = 6 - 6a$.

Ta thấy khi $a = -1$ thì (1a) vô nghiệm $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Rightarrow b = 2$ (loại)

Kết luận: Hệ (1) có nghiệm với mọi $a \Leftrightarrow b = 0$.

11. Xét hệ: $\begin{cases} 2mx - (m+1)y = 1 - 3m \\ (m-2)x + my = 3m - 2 \end{cases}$ (I)

a) Khi $m = 3$ thì

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = -8 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{11} \\ y = \dfrac{25}{11} \end{cases}.$$

Vậy khi $m = 3$ thì (I) có một nghiệm là $\left(\dfrac{2}{11}; \dfrac{25}{11}\right)$.

b) Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2m & -m-1 \\ m-2 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - m - 2 = (m-1)(3m+2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-3m & -m-1 \\ 3m-2 & m \end{vmatrix} = 2(m-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m & 1-3m \\ m-2 & 3m-2 \end{vmatrix} = 9m^2 - 11m + 2 = (m-1)(9m-2)$$

* Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) \Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

* Khi đó hệ có nghiệm là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2}{3m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{9m-2}{3m+2} = 3 - \dfrac{8}{3m+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x + y = \frac{8}{3m+2} + 3 - \frac{8}{3m+2} = 3$$

Vậy hệ thức $4x + y = 3$ là hệ thức cần tìm.

12. Gọi x, y lần lượt là tuổi của cha và tuổi của con hiện nay $(x > y > 0)$

- Hai năm trước đây tuổi cha gấp 7 lần tuổi con

  $\Rightarrow x - 2 = 7(y - 2) \Rightarrow x - 7y = -12$ (1).

- Sau ba năm nữa thì tuổi cha gấp 4 lần tuổi con

  $\Rightarrow x + 3 = 4(y + 3) \Rightarrow x - 4y = 9$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x = 37$; $y = 7$.

Vậy hiện nay tuổi của cha là 37 tuổi và tuổi của con là 7 tuổi.

13. Gọi x, y lần lượt là số hộp chứa 3kg và số hộp chứa 4kg.

Ta có: * Có tất cả là 25 hộp $\Rightarrow x + y = 25$ (1)

* Có 90 sản phẩm xếp hết vào 25 hộp $\Rightarrow 3x + 4y = 90$ (2).

Giải hệ (1) và (2) ta được: $x = 10$ và $y = 15$.

Vậy có 10 hộp loại đựng 3kg và 15 hộp loại đựng 4kg.

Vấn đề 2: **Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn**

1. a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 9 & (1) \\ -2x + 3y - 2z = -3 & (2) \\ 4x + 3y + z = 18 & (3) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow z = 9 - 3x + 2y$, thay vào (2) và (3) ta được:

$$\begin{cases} -2x + 3y - 18 + 6x - 4y = -3 \\ 4x + 3y + 9 - 3x + 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 15 \\ x + 5y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = -1.$$

Vậy hệ có nghiệm là $(4; 1; -1)$.

b) $\begin{cases} x-3y+2z=-2 \ (1) \\ -2x+5y+z=5 \ (2) \\ 3x-7y+4z=8 \ (3) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ x = 3y – 2z – 2. Thay vào (2) và (3), ta được:

$$\begin{cases} -2(3y-2z-2)+5y+z=5 \\ 3(3y-2z-2)-7y+4z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+5z=1 \\ 2y-2z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow x=21.$$

Vậy hệ có nghiệm là (21; 9; 2).

2. $\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y+mz=3 & (2) \\ x+my+3z=2 & (3) \end{cases}$ (*).

Từ (1) $\Rightarrow$ z = x + y – 1. Thay vào (2) và (3), ta có:

$$\begin{cases} 2x+3y+m(x+y-1)=3 \\ x+my+3(x+y-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x+(m+3)y=m+3 \\ 4x+(m+3)y=5 \end{cases} \quad (4)$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m+2 & m+3 \\ 4 & m+3 \end{vmatrix} = (m+3)(m-2).$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+3 & m+3 \\ 5 & m+3 \end{vmatrix} = (m+3)(m-2).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+2 & m+3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = m-2.$$

Biện luận:

- $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$ và $m \neq 2$:

(4) có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=1 \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{1}{m+3} \end{cases} \Rightarrow z=\dfrac{1}{m+3}.$

- $D = 0 \Leftrightarrow m = -3$ hoặc m = 2.

* Khi m = –3 thì $D_y \neq 0 \Rightarrow$ Hệ (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

* Khi m = 2 thì $D_x = D_y = 0$.

Hệ (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=5 \\ 4x+5y=5 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{5-4x}{5}.$

$\Rightarrow$ Hệ (*) có vô số nghiệm là $\left(x; \dfrac{5-4x}{5}; \dfrac{x}{5}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: * $m \neq -3$ và $m \neq 2$: $S = \left\{\left(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}\right)\right\}$.

* $m = -3$: $S = \varnothing$.

* $m = 2$: $S = \left\{\left(x; \frac{5-4x}{5}; \frac{x}{5}\right), x \in \mathbb{R}\right\}$.

3. $\begin{cases} x+2y-3z=a \ (1) \\ 3x-y+2z=b \ (2) \\ x-5y+8z=c \ (3) \end{cases}$ (I).

Từ (1) $\Rightarrow x = -2y + 3z + a$. Thay vào (2) và (3), ta có:

$$\begin{cases} 3(-2y+3z+a)-y+2z=b \\ (-2y+3z+a)-5y+8z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y+11z=b-3a \\ -7y+11z=c-a \end{cases} \text{ (II).}$$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow b - 3a = c - a \Leftrightarrow 2a - b + c = 0$.

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HAI ẨN

Vấn đề 1: **hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai**

1. a) $\begin{cases} x^2+11=5y^2 \quad (1a) \\ 2x+3y=12 \quad (1b) \end{cases}$ (1)

Từ (1b) $\Rightarrow y = \frac{12-2x}{3}$. Thay vào (1a) ta được:

$$x^2 + 11 = 5\left(\frac{12-2x}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 99 = 720 - 240x + 20x^2$$

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 240x + 621 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{207}{11}.$$

Khi $x = 3$ thì $y = 2$; khi $x = \frac{207}{11}$ thì $y = \frac{94}{11}$.

Vậy hệ (1) có hai nghiệm là $(3;2)$, $\left(\frac{207}{11}; \frac{94}{11}\right)$.

b) $\begin{cases} 9x^2+4y^2+6xy+42x-40y+135=0 \quad (2a) \\ 3x-2y+9=0 \quad (2b) \end{cases}$ (2)

Từ (2b) $\Rightarrow y = \frac{3x+9}{2}$. Thay vào (2a), ta được:

$$9x^2+4\left(\frac{3x+9}{2}\right)^2+6.x.\frac{3x+9}{2}+42x-40.\frac{3x+9}{2}+135=0$$

$\Leftrightarrow 9x^2+9x^2+54x+81+9x^2+27x+42x-60x-180+135=0$

$\Leftrightarrow 27x^2+63x+36=0 \Leftrightarrow 3x^2+7x+4=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=-\frac{4}{3}$.

Khi $x=-1$ thì $y=3$; khi $x=-\frac{4}{3}$ thì $y=\frac{5}{2}$.

Vậy hệ (2) có hai nghiệm là $(-1;3)$, $\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{2}\right)$.

c) $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 & (3a) \\ x+y+8=0 & (3b) \end{cases}$ (3)

Từ (3b) $\Rightarrow y=-x-8$. Thay vào (3a), ta được:

$x^2+(-x-8)^2+6x+2(-x-8)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+20x+48=0 \Leftrightarrow x^2+10x+24=0 \Leftrightarrow x=-4$ hoặc $x=-6$.

Khi $x=-4$ thì $y=-4$; khi $x=-6$ thì $y=-2$.

Vậy hệ (3) có hai nghiệm là $(-4;-4)$ và $(-6;-2)$.

d) $\begin{cases} 7x^2+9y^2-12xy+5x+3y+5=0 & (4a) \\ 2x-3y=1 & (4b) \end{cases}$ (4)

Từ (4b) $\Rightarrow y=\frac{2x-1}{3}$. Thay vào (4a) ta được:

$$7x^2+9\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2-12x.\frac{2x-1}{3}+5x+3.\frac{2x-1}{3}+5=0$$

$\Leftrightarrow 7x^2+4x^2-4x+1-8x^2+4x+5x+2x-1+5=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+7x+5=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy hệ (4) vô nghiệm.

2. a) $\begin{cases} \frac{3x+y}{x-1}-\frac{x-y}{2y}=2 & (1a) \\ x-y=4 & (1b) \end{cases}$ (1)

Điều kiện: $x\neq 1$ và $y\neq 0$.

Từ (1b) $\Rightarrow y=x-4$. Thay vào (1a), ta được:

$$\frac{3x+x-4}{x-1}-\frac{x-x+4}{2x-8}=2 \Leftrightarrow 4-\frac{2}{x-4}=2$$

$\Leftrightarrow 2x-8-2=0 \Leftrightarrow x=5$ (nhận). Suy ra $y=1$ (nhận).

Vậy hệ (1) có nghiệm là (5; 1).

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3} & (2a) \\ \dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{4} & (2b) \end{cases}$ (2)

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Từ (2a) $\Rightarrow \dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{3}$. Thay vào (2b), ta được:

$$\frac{1}{9x^2}-\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{9x}-\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9x}=\frac{13}{36} \Leftrightarrow x=\frac{8}{13}. \text{ Suy ra } y=\frac{12}{5}.$$

Vậy hệ (2) có nghiệm là $\left(\dfrac{8}{13};\dfrac{12}{5}\right)$.

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} & (3a) \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4} & (3b) \end{cases}$ (3)

Điều kiện: $x \neq -1$ và $y \neq 0$.

Từ (3a) $\Rightarrow \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{y}$. Thay vào (3b), ta được:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{y}\right)^2-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{9}-\frac{2}{3y}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{3y}=-\frac{5}{36} \Leftrightarrow y=-\frac{24}{5}. \text{ Suy ra } x=\frac{11}{13}.$$

Vậy hệ (3) có nghiệm là $\left(\dfrac{11}{13};-\dfrac{24}{5}\right)$.

3. a) $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2-117=0 & (1a) \\ x-y=25 & (1b) \end{cases}$ (1)

Từ (1b) $\Rightarrow y = x - 25$. Thay vào (1a) ta được:

$$(2x-25)^4+4(2x-25)^2-117=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x-25)^2=-13 \\ (2x-25)^2=9 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x - 25 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 14$ hoặc $x = 11$.

Khi $x = 14$ thì $y = -11$; khi $x = 11$ thì $y = -14$.

Vậy hệ (1) có 2 nghiệm là $(14; -11)$ và $(11; -14)$.

b) $\begin{cases}(18x^2+18x+18y-306)(12x^2-12xy-336)=0 & (2a)\\ 3x+4y=0 & (2b)\end{cases}$ (2)

Từ (2b) $\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$. Thế vào (2a), ta được:

$$\left(18x^2+18x+18\left(-\frac{3}{4}x\right)-306\right).\left(12x^2-12x\left(-\frac{3}{4}x\right)-336\right)=0$$

$\Leftrightarrow (36x^2 + 36x - 27x - 612)(12x^2 + 9x^2 - 336) = 0$

$\Leftrightarrow (36x^2 + 9x - 612)(21x^2 - 336) = 0$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=-\frac{17}{4} \vee x=-4$.

Khi $x = 4 \Rightarrow y = -3$; khi $x = -4 \Rightarrow y = 3$; khi $x=-\frac{17}{4} \Rightarrow y=\frac{51}{16}$;

Vậy hệ (2) có ba nghiệm là $(4;-3),(-4;3),\left(-\frac{17}{4};\frac{51}{16}\right)$.

c) $\begin{cases}x-y=1 & (3a)\\ x^3-y^3=7 & (3b)\end{cases}$ (3).

Từ (3a) $\Rightarrow y = x - 1$. Thay vào (3b), ta được:

$x^3 - (x - 1)^3 = 7 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Khi $x = -1$ thì $y = -2$; khi $x = 2$ thì $y = 1$.

Vậy hệ (3) có hai nghiệm là $(-1; -2)$ và $(2; 1)$.

d) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45 & (4a)\\ x+y=5 & (4b)\end{cases}$ (4).

Từ (4b) $\Rightarrow y = 5 - x$. Thay vào (4a) ta được:

$(2x - 5)[5(2x - 5)] = 45 \Leftrightarrow (2x - 5)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = 1$.

Khi $x = 4$ thì $y = 1$; khi $x = 1$ thì $y = 4$.

Vậy hệ (4) có nghiệm là $(4; 1)$ và $(1; 4)$.

4. a) $\begin{cases}(x+a)^2+2(y-a)^2-(x+a)(y-a)=24 & (1a)\\ x+y=2 & (1b)\end{cases}$ (1).

Từ (1b) $\Rightarrow y = 2 - x$. Thay vào (1a), ta được:

$(x + a)^2 + 2(2 - x - a)^2 - (x + a)(2 - x - a) = 24$

$\Leftrightarrow (x + a)^2 + 2(x + a)^2 - 8(x + a) + 8 + (x + a)^2 - 2(x + a) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x + a)^2 - 10(x + a) - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x + a = -1$ hay $x + a = 4$

$\Leftrightarrow x = -a - 1$ hay $x = 4 - a$.

Khi $x = -a - 1$ thì $y = a + 3$; Khi $x = 4 - a$ thì $y = a - 2$.

Vậy hệ (1) có nghiệm là $(-a -1; a + 3)$ và $(4 - a; a - 2)$.

b) $\begin{cases}(x+m)^2-y^2+y(x+m)=11 & (2a)\\ x+2y=7-m & (2b)\end{cases}$ (2)

Từ (2b) $\Rightarrow$ x = 7 – m – 2y. Thay vào (2a), ta được:

$(7-2y)^2-y^2+y(7-2y)=11$

$\Leftrightarrow y^2-21y+38=0 \Leftrightarrow y=2$ hay $y=19$.

Khi y = 2 thì x = 3 – m; Khi y = 19 thì x = –11 – m.

Vậy hệ (2) có nghiệm là (3 – m; 2) và (–11 – m; 19).

c) $\begin{cases}2(x-m)^2-(y+2m)^2+x=m+2 & (3a)\\ x+y=2-m & (3b)\end{cases}$ (3).

Từ (3b) $\Rightarrow$ x = 2 – m – y. Thay vào (3a), ta được:

$2(2-2m-y)^2-(y+2m)^2+2-m-y=m+2$

$\Leftrightarrow 2[2-(y+2m)]^2-(y+2m)^2-(y+2m)=0$

$\Leftrightarrow 2[4-4(y+2m)+(y+2m)^2]-(y+2m)^2-(x+2m)=0$

$\Leftrightarrow (y+2m)^2-9(y+2m)+8=0$

$\Leftrightarrow y+2m=1$ hoặc $y+2m=8$

$\Leftrightarrow y=1-2m$ hoặc $y=8-2m$.

Khi y = 1 – 2m thì x = 2 – m –1 + 2m = m + 1.

Khi y = 8 – 2m thì x = 2 – m – 8 + 2m = m – 6.

Vậy hệ (3) có nghiệm là (m + 1; 1 – 2m), (m – 6; 8 – 2m).

5. $\begin{cases}x+y=1 & (1)\\ x^3-y^3=m(x-y) & (2)\end{cases}$ (I)

Từ (1) suy ra y = 1 – x. Thay vào (2) ta được:

$x^3-(1-x)^3=m(x-1+x)$

$\Leftrightarrow x^3-1+3x-3x^2+x^3=m(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+3x-1-m(2x-1)$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x^2-2x+2-m)=0$ (3)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ g(x)=2x^2-2x+2-m=0 \quad (4)\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (4) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ g(\frac{1}{2})\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m-3>0\\ -m+\frac{3}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Vậy (I) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Vấn đề 2: Giải hệ đối xứng loại I

1. a) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19 \\ 15xy+5(x+y)=-175 \end{cases}$ (1)

Đặt S = x + y; P = xy. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} 5S+2P=-19 \\ 5S+15P=-175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-12 \end{cases}.$$

Suy ra x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - X - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ hoặc $X = -3$.

Vậy hệ (1) có nghiệm là (4; –3) hoặc (–3; 4).

b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+y+xy=2 \end{cases}$ (2)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (2) trở thành $\begin{cases} S^2-P=4 \\ S+P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-3 \\ P=5 \end{cases}$ (loại) hoặc $\begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases}$ (nhận).

Suy ra x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0$ hoặc $X = 2$.

Vậy hệ (2) có hai nghiệm (0; 2) và (2; 0).

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2=160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)=xy \\ (x+y)^2-2xy=160 \end{cases}$ (3) (x, y ≠ 0)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (3) trở thành $\begin{cases} 3S=P \\ S^2-2P=160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-6S-160=0 \\ P=3S \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=-10 \\ P=-30 \end{cases} \text{ (loại) hoặc } \begin{cases} S=16 \\ P=48 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Suy ra x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 16X + 48 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ hoặc $X = 12$.

Vậy hệ (3) có hai nghiệm (4; 12) và (12; 4).

d) $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$ (4)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (4) trở thành $\begin{cases} S^2-2P=2(P+2) \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36=4P+4 \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases}$ (nhận).

Suy ra x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ hoặc $X = 2$.

Vậy hệ (4) có hai nghiệm (4; 2) và (2; 4).

2. a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 36(x^2+y^2)=13x^2y^2 \end{cases}$ (1) ($xy \neq 0$)

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Hệ (1) trở thành $\begin{cases} 6S=5P \\ 36(S^2-2P)=13P^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6S=5P \\ 25P^2-72P=13P^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6S=5P \\ 12P^2-72P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S=0 \end{cases}$ (loại) hoặc $\begin{cases} P=6 \\ S=5 \end{cases}$ (nhận).

Suy ra x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = 3$ hoặc $X = 2$.

Vậy hệ (4) có hai nghiệm (3; 2) và (2; 3).

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{4x+y}+x=3 \\ \dfrac{x}{4x+y}=-1 \end{cases}$ (2). Đặt $u = \dfrac{4}{4x+y}$ và $v = x$.

Ta được (2) trở thành:

$\begin{cases} u+v=3 \\ uv=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=4 \end{cases} \vee \begin{cases} u=4 \\ v=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{4x+y}=-1 \\ x=4 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{4}{4x+y}=4 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y=-4 \\ x=4 \end{cases} \vee \begin{cases} 16x+4y=4 \\ x=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-20 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$. Vậy hệ (2) có nghiệm là (4; –20) và (–1; 5).

c) $\begin{cases} (x^2-xy)^2+(x+y)^2=4 \\ (x^2-xy)(x+y)-(x^2-xy+x+y)=2 \end{cases}$ (3)

Đặt $u = x^2 - xy$ và $v = x + y$. Ta được:

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=4 \\ uv-(u+v)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=4 \\ u+v=uv-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (uv-2)^2 - 2uv = 4 \\ u+v = uv-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (uv)^2 - 6uv = 0 \\ u+v = uv-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 0 \\ u+v = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} uv = 6 \\ u+v = 4 \end{cases} \text{(loại)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 0 \\ u+v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} v = 0 \\ u = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 0 \\ x+y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - xy = -2 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ (3) có nghiệm là (0; –2) và (–1; –1).

d) $$\begin{cases} (x-2y)^2 + (x+y)^2 + (x-2y)(x+y) = 13 \\ (x-2y)(x+y)(2x-y) = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 + (x+y)^2 + (x-2y)(x+y) = 13 \\ (x-2y)(x+y)(x-2y+x+y) = 12 \end{cases} \quad (4)$$

Đặt u = x – 2y và v = x + y.

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 13 \\ uv(u+v) = 12 \end{cases} \quad (5)$$

Đặt S = u + v và P = uv. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 13 \\ SP = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 13 \\ S(S^2 - 13) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 13 \\ (S+1)(S^2 - S - 12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -12 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -3 \\ P = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = -1 \\ uv = -12 \end{cases} \vee \begin{cases} u+v = -3 \\ uv = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} u+v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ v = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = -4 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=3 \\ x+y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 7 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Vậy hệ (4) có 6 nghiệm là (5; –2), (1; –2), (–2; 3), (–7; 3), (7; –4), (5; –4).

3. a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$ (1)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S^3-3SP=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ (1) có nghiệm là (2; –1), (–1; 2).

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ (2)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ S^3-3SP=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ (2) có nghiệm là (2; 3), (3; 2).

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=18xy \\ x+y=12 \end{cases}$ (3) (xy ≠ 0).

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} S=12 \\ S^3-3SP=18P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=12 \\ P=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ xy=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}.$$

Vậy hệ (3) có nghiệm là (4; 8), (8; 4).

d) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$ (4).

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} S^3-3SP=7 \\ SP=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ (1) có nghiệm là (2; –1), (–1; 2).

4. a) $\begin{cases} x^2+xy=m & (1a) \\ 2x-y=1 & (1b) \end{cases}$ (1)

Từ (1b) $\Rightarrow$ y = 2x – 1. Thay vào (1a), ta được:

$x^2 + x(2x - 1) = m \Leftrightarrow 3x^2 - x - m = 0$ (1c).

Hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1c) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{12}$.

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 + mx = 1 & (2a) \\ x + y = 2 & (2b) \end{cases}$ (2)

Từ (2b) $\Rightarrow y = 2 - x$. Thay vào (2a), ta được:

$x^2 - (2 - x)^2 + mx = 1 \Leftrightarrow (m + 4)x - 5 = 0$ (2c).

Hệ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2c) có nghiệm $\Leftrightarrow a \neq 0 \vee \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -4$.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ xy = 1 \end{cases}$ (3)

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = m + 2 \\ P = 1 \end{cases}$.

Hệ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow m + 2 - 4.1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 2 \end{cases}$ (4)

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ 2P = 4 - m \end{cases}$.

Hệ (4) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 2(4 - m) \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

5. a) $\begin{cases} x + y + 2 = 2(x + 1)(y + 1) \\ x + y - xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2xy = 0 \\ x + y - xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2m \\ xy = m \end{cases}$

$\Rightarrow x, y$ lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2 + 2mX + m = 0$ (*).

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

b) $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ (2)

Nhận xét: Nếu (x; y) là nghiệm của (2) thì (y; x) cũng là nghiệm của (2).

Do đó: Nếu (2) có nghiệm duy nhất (x; y) thì (x; y) = (y; x)

$\Rightarrow x = y$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x^2 = 3 \\ 2x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = 2 \end{cases} hay \begin{cases} x = -3 \\ m = 18 \end{cases} \Rightarrow m = 2$ hay $m = 18$.

Thử lại:

▸ $m = 2$: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ (x + y)^2 - 2xy = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=3 \\ (x+y)^2+2(x+y)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=7 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$\Leftrightarrow x = y = 1.$

▸ $m = 18$:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=3 \\ (x+y)^2-2xy=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=3 \\ (x+y)^2+2(x+y)=24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-\sqrt{5} \\ y=2+\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ y=2-\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy hệ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 2$.

Vấn đề 3: Giải hệ đối xứng loại II

1. a) $\begin{cases} x^2+4y=x & (1a) \\ y^2+4x=y & (1b) \end{cases}$ (1)

Lấy (1a) – (1b) ta được:

$$x^2-y^2-4(x-y)=x-y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=5-x \end{cases}.$$

▸ $y = x$: (1a) $\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -3$.
Do đó (1) có nghiệm là (0; 0) và (–3; –3).

▸ $y = 5 – x$: (1a) $\Leftrightarrow x^2+4(5-x)=x \Leftrightarrow x^2-5x+20=0$ (vô nghiệm)
Do đó (1) vô nghiệm.

Kết luận: Hệ (1) có hai nghiệm là (0; 0) và (–3; –3).

b) $\begin{cases} x^3=4y & (2a) \\ y^3=4x & (2b) \end{cases}$ (2)

Lấy (2a) – (2b) ta được:

$x^3-y^3=4(y-x)$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+yx+y^2+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+yx+y^2+4=0 \ (*) \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

(Vì (*) có $\Delta = y^2-4(y^2+4) = -3y^2-16 < 0$ nên (*) vô nghiệm)

Với $y = x$: (2a) $\Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$.

Do đó (2) có nghiệm là (0; 0), (2; 2) và (–2; –2).

c) $\begin{cases} x^2=10x+5y & (3a) \\ y^2=10y+5x & (3b) \end{cases}$ (3)

Lấy (3a) – (3b) ta được: $x^2-y^2=5(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=5-x \end{cases}$.

- $y = x$: (3a) $\Leftrightarrow x^2 = 15x \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 15$.
  Do đó (3) có nghiệm là (0; 0) và (15; 15).
- $y = 5 - x$: (1a) $\Leftrightarrow x^2 = 10x + 5(5 - x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 25 = 0$ (vô nghiệm)
  Do đó (3) vô nghiệm.

Kết luận: Hệ (3) có hai nghiệm là (0; 0) và (15; 15).

d) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 & (4a) \\ 2y = x^2 - 4x + 5 & (4b) \end{cases}$ (4)

Lấy (4a) – (4b) ta được:

$2(x - y) = y^2 - x^2 + 4(x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 2 - x \end{array}\right.$.

- $y = x$: (4a) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 5$.
  Do đó (4) có nghiệm là (1; 1) và (5; 5).
- $y = 2 - x$: (4b) $\Leftrightarrow 2(2 - x) = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  Do đó (4) có nghiệm là (1; 1).

Kết luận: Hệ (4) có ba nghiệm là (1; 1) và (5; 5).

2. a) $\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y & (1a) \\ y^2 - 3yx = 4x & (1b) \end{cases}$. Điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Lấy (1a) – (1b) ta được:

$x^2 - y^2 = -4(x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -4 - x \end{array}\right.$.

- $y = x$: (1a) $\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 = 4x \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -2$.
  Do đó (1) có nghiệm là (–2; –2).
- $y = -4 - x$: (1a) $\Leftrightarrow x^2 - 3x(-4 - x) = 4(-4 - x)$
  $\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
  Do đó (1) có nghiệm là (–2; –2).

Kết luận: Hệ (1) có 1 nghiệm là (–2; –2).

b) $\begin{cases} x + \sqrt[4]{y - 1} = 1 & (2a) \\ y + \sqrt[4]{x - 1} = 1 & (2b) \end{cases}$ (2).

Điều kiện: $x \geq 1$ và $y \geq 1$.

- Nếu $x > 1$ thì vế trái (2b) > 1 (vô lí)
- Nếu $y > 1$ thì vế trái (2a) > 1 (vô lí)

  Do đó $x = y = 1$. Thử lại ta thấy (1; 1) thỏa (2).

Vậy (2) có nghiệm duy nhất là (1; 1)

c) $\begin{cases} x^3 = 8x + 17y \quad (3a) \\ y^3 = 8y + 17x \quad (3b) \end{cases}$ (3)

Lấy (3a) – (3b) ta được:

$x^3 - y^3 = -9(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ x^2 + xy + y^2 + 9 = 0 (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$ (vì vế trái (*) > 0 $\forall$ x, y).

Với y = x: (3a) $\Leftrightarrow x^3 = 25x \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 5$.

Do đó (3) có nghiệm là (0; 0), (5; 5) và (–5; –5).

d) $\begin{cases} x^2 = 6x - y^3 \quad (4a) \\ y^2 = 6y - x^3 \quad (4b) \end{cases}$ (4)

Lấy (4a) – (4b) ta được: $x^2 - y^2 = 6(x - y) + x^3 - y^3$

$\Leftrightarrow x^3 - y^3 - (x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - (x + y) + 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ x^2 + xy + y^2 - x - y + 6 = 0 \end{array}\right.$.

- y = x: (4a) $\Leftrightarrow x^2 = 6x - x^3 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$ hay $x = -3$.

  Do đó (4) có nghiệm là (0; 0), (2; 2), (–3; –3).
- Với $x^2 + xy + y^2 - x - y + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)x + y^2 - y + 6 = 0$ (4c)

Ta có (4c) có $\Delta = (y - 1)^2 - 4(y^2 - y + 6) = -3y^2 + 2y - 23 < 0$, $\forall$y nên (4c) vô nghiệm.

Kết luận: Hệ (4) có 3 nghiệm là (0; 0), (2; 2) và (–3; –3).

e) $\begin{cases} 3x^2 = 2y + \dfrac{1}{y} \\ 3y^2 = 2x + \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 y = 2y^2 + 1 \quad (5a) \\ 3y^2 x = 2x^2 + 1 \quad (5b) \end{cases}$ (5). Điều kiện: $xy \neq 0$.

Lấy (5a) – (5b) ta được:

$3xy(x - y) = 2(y^2 - x^2) \Leftrightarrow 3xy(x - y) + 2(x - y)(y + x) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(3xy + 2y + 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ 3xy + 2y + 2x = 0 \quad (*) \end{array}\right.$.

- y = x: (1a) $\Leftrightarrow 3x^3 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó (5) có nghiệm là (1; 1).
- Do vế phải của (5a) và (5b) lớn hơn 0 nên nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì x > 0 và y > 0 nên (*) vô nghiệm.

Kết luận: Hệ (5) có 1 nghiệm là (1; 1).

f) $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{y^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + y^3 = 3 \quad (6a) \\ 2yx^2 + x^3 = 3 \quad (6b) \end{cases}$ (6). Điều kiện: $xy \neq 0$.

Lấy (6a) – (6b) ta được:

$2xy(y-x)+y^3-x^3=0 \Leftrightarrow (y-x)(2xy+x^2+xy+y^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+3xy+y^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+3xy+y^2=0\ (*) \end{cases}$.

▸ $y = x$: (1a) $\Leftrightarrow 2x^3 + x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó (6) có nghiệm là (1; 1).

▸ Với $x^2 + 3xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = -xy \Rightarrow xy < 0$

$\Rightarrow$ Vế trái của (5a) $< 0 < 3$ (vô lí) $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

Kết luận: Hệ (6) có 1 nghiệm là (1; 1).

3. $\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx & (1a) \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my & (1b) \end{cases}$ (1)

Nhận xét: Nếu hệ có nghiệm (x; y) thì (y; x) cũng là nghiệm của hệ.

Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất là (x; y) thì $x = y$.

Khi đó (1) trở thành $x^3 = 8x^2 - mx \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x)=x^2-8x+m=0\ (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc (2) có nghiệm kép $x = 0$

$\Leftrightarrow \Delta' < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta'=0 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow 16 - m < 0$ hoặc $\begin{cases} 16-m=0 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 16$.

Khi $m > 4$ ta có:

$(1a) - (1b) \Rightarrow x^3 - y^3 = 6(x^2 - y^2) - m(x - y)$

$\Rightarrow (x - y)[x^2 + xy + y^2 - 6(x + y) + m] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0\ (3) \end{cases}$

Ta có: (3) có $\Delta = (y - 6)^2 - 4y^2 + 24y - 4m = -3y^2 + 12y + 36 - 4m = g(y)$.

mà $g(y)$ có $\Delta' = 36 + 3(36 - 4m) = -12m + 144 = 12(12 - m) < 0$

nên $\Delta = g(y) < 0 \Rightarrow$ (3) vô nghiệm. Suy ra $x = y$.

Khi đó (1) trở thành $x^3 = 8x^2 - mx \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x)=x^2-8x+m=0\ (4) \end{cases}$

Do $m > 16$ nên (4) có $\Delta' = 16 - m < 0$ nên (4) vô nghiệm. Vậy $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất là (0; 0).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m > 16$.

4. $\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) & (a) \\ xy + y^2 = m(x-1) & (b) \end{cases}$ (1)

Nhận xét: Nếu hệ có nghiệm (x; y) thì (y; x) cũng là nghiệm của hệ.

Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất là (x; y) thì $x = y$.

Khi đó (1) trở thành $2x^2 = m(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - mx + m = 0$ (2)

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 8$.

▸ Khi $m = 0$ ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases}$ có ít nhất hai nghiệm là $(0; 0)$ và $(1; -1)$

$\Rightarrow m = 0$ (loại).

▸ Khi $m = 8$ ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) & (a) \\ xy + y^2 = 8(x-1) & (b) \end{cases}$

(a) – (b) $\Rightarrow x^2 - y^2 = 8(y - x)$

$\Rightarrow (x - y)[x + y + 8] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 8 \end{cases}$.

* $x = y$: (a) $\Leftrightarrow 2x^2 = 8(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$.

* $y = -x - 8$: (a) $\Leftrightarrow x(-x-8) + x^2 = 8(-x-8-1) \Leftrightarrow 72 = 0$ (vô nghiệm)

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất là $(2; 2)$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 8$.

5. $\begin{cases} x^2y + m = y^3 + xy \\ xy^2 + m^3 = x^3 + yx \end{cases}$ (1)

Nhận xét: Nếu hệ có nghiệm $(x; y)$ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y)$ thì $x = y$.

Khi đó (1) trở thành $x^3 + m = x^3 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = m$ (2)

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

▸ Khi $m = 0$ ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = y^3 + xy & (a) \\ xy^2 = x^3 + yx & (b) \end{cases}$

(a) – (b) $\Rightarrow xy(x - y) = y^3 - x^3$.

$\Rightarrow (x - y)[xy + x^2 + xy + y^2] = 0$

$\Rightarrow 9x - y)(x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$.

* $x = y$: (a) $\Leftrightarrow x^3 = x^3 + x^2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$.

* $y = -x$: (a) $\Leftrightarrow -x^3 = -x^3 - x^2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất là $(0; 0)$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

6. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} & (a) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} & (b) \end{cases}$ (1)

Ta có:

(a) – (b) $\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} - \sqrt{y+1} - \sqrt{x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{y-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}} \quad (c) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ x = y (vì VT (c) < VP(c) do $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}>\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}>0$)

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \\ y=x \end{cases}$

a) Khi m = 9 thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3 \quad (*) \\ y=x \end{cases}$.

Ta có: * x = 3 là nghiệm của (*).

* x > 3 thì VT(*) > 3; x < 3 thì VT(*) < 3.

Do đó (*) có nghiệm duy nhất x = 3. Vậy hệ có nghiệm duy nhất x = y = 3.

b) Ta có: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m}$ (**) có nghiệm

Do $x \geq 2$ nên vế trái (**) $\geq \sqrt{3}$.

Do đó (**) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{m} \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow m \geq 3$.

§6. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 3

1. a) $\dfrac{x^2-5x}{x-1}+\sqrt{x-1}=x^3+\sqrt{1-x}$.

* Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* Vì điều kiện xác định của phương trình là $x \in \varnothing$ nên phương trình vô nghiệm.

b) $x^3-\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9-x^2}+27$

* Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

* Thay x = ± 3 vào phương trình ta được phương trình có nghiệm là x = 3.

c) $\dfrac{2x-4}{\sqrt{x-2}}-x\sqrt{x^2-1}=\sqrt{1-x^2}$

* Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$

* Vì điều kiện xác định của phương trình là $x\in\varnothing$ nên phương trình vô nghiệm.

d) $x^2+xy-3y+5=x+\sqrt{-x^2-3y^2+2xy}$

* Điều kiện: $-x^2-3y^2+2xy\geq 0 \Leftrightarrow -x^2+2xy-y^2-2y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow -(x-y)^2-2y^2\geq 0 \Leftrightarrow x=y=0.$

* Thay $x=y=0$ vào phương trình ta thấy $x=y=0$ không thỏa nên phương trình vô nghiệm.

2. a) $m^2(x-1)+m=x(3m-2) \Leftrightarrow (m^2-3m+2)x=m^2-m$ (1).

▸ $a=m^2-3m+2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$ và $m\neq 2$:

(1) có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{m^2-m}{m^2-3m+2}=\dfrac{m}{m-2}$.

▸ $m=1$: (1) $\Leftrightarrow 0x=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

▸ $m=2$: (1) $\Leftrightarrow 0x=3 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Kết luận: + $m\neq 1$ và $m\neq 3$: $S=\left\{\dfrac{m}{m-2}\right\}$.

+ $m=1$: $S=\mathbb{R}$.

+ $m=2$: $S=\varnothing$.

b) $|mx-1|=|3x+2-m|$ (2)

$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx-1=3x+2-m \\ mx-1=-3x-2+m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-3)x=3-m & (a) \\ (m+3)x=m-1 & (b) \end{array}\right.$

▸ $m=3$: $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0x=0 \\ 6x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

▸ $m=-3$: $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6x=6 \\ 0x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1$.

▸ $m\neq 3$ và $m\neq -3$: $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{m-1}{m+3} \end{array}\right.$.

Kết luận: + $m=3$: $S=\mathbb{R}$.

+ $m=-3$: $S=\{-1\}$.

+ $m\neq 3$ và -3: $S=\left\{-1;\dfrac{m-1}{m+3}\right\}$.

c) $\frac{mx-2}{x-2}=3$ (3).

Tà có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ mx-2=3x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (m-3)x=-4 \ (3a) \end{cases}$.

▸ m = 3: (3a) $\Leftrightarrow$ 0x = –4 $\Leftrightarrow$ x $\in \varnothing \Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

▸ m $\neq$ 3: (3a) $\Leftrightarrow$ x = $\frac{-4}{m-3}$. Ta có: $\frac{-4}{m-3}=2 \Leftrightarrow$ m = 1.

Do đó: + m = 1: (3) vô nghiệm.

+ m $\neq$ 1: (3) có nghiệm là x = $\frac{-4}{m-3}$.

Kết luận: + m = 3 hoặc m = 1: S = $\varnothing$.

+ m $\neq$ 3 và m $\neq$ 1: S = $\left\{\frac{-4}{m-3}\right\}$.

d) $\frac{m^2(x-4)+1}{x-4}=m$ (4).

(4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \neq 0 \\ m^2x-4m^2=mx-4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ (m^2-m)x=4m^2-4m \ (4a) \end{cases}$

▸ m^2 – m $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 0 và m $\neq$ 1: (4a) $\Leftrightarrow$ x = 4 (loại) $\Rightarrow$ (4) vô nghiệm.

▸ m = 0 hay m = 1: (4a) $\Leftrightarrow$ 0x = 0 $\Leftrightarrow \forall$ x $\in \mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Kết luận: + m $\neq$ 0 và m $\neq$ 1: S = $\varnothing$.

+ m = 0 hoặc m = 1: S = $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

3. a) ▸ a = m – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1:

(1) $\Leftrightarrow$ 0x + 4 = 0 $\Leftrightarrow$ x $\in \varnothing$.

▸ a = m – 1 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 1:

$\Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(m+3) = -4(m-1)$.

+ m > 1 thì $\Delta' < 0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

+ m < 1 thì $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt là

x = $\frac{-m+1 \pm 2\sqrt{1-m}}{m-1}$.

Kết luận: + m $\geq$ 1: S = $\varnothing$.

+ m < 1: S = $\left\{\frac{-m+1 \pm 2\sqrt{1-m}}{m-1}\right\}$.

b) ▸ (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = 4-4m \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ m < 1.

Khi đó $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1x_2 = \dfrac{m+3}{m-1}$.

Do đó: $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 5$

$\Leftrightarrow 4 - \dfrac{m+3}{m-1} = 5 \Leftrightarrow m - 1 + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (nhận).

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = -1$.

4. ▸ Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 8$.

▸ Hiệu hai nghiệm của phương trình bằng 1

$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 - 4.2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 9$ (nhận) $\Leftrightarrow m = \pm 3$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 3$.

5. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$(m - 6)x^2 + m = 2mx - 2$

$\Leftrightarrow (m - 6)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1).

Đồ thị (P) và (d) không cắt nhau

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} hay \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ 2m = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} hay \begin{cases} m \neq 6 \\ 4m + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m < -3$.

6. Giải và biện luận hệ $\begin{cases} (m+2)x + 3y = 6 \\ mx + (2m-1)y = m+1 \end{cases}$ (1).

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m+2 & 3 \\ m & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2 = 2(m + 1)(m - 1)$.

$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ m+1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 12m - 6 - 3m - 3 = 9(m - 1)$.

$D_y = \begin{vmatrix} m+2 & 6 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m - 1)(m - 2)$.

Biện luận:

▸ $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -1$:

Hệ (1) có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{9}{2(m+1)} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m-2}{2(m+1)} \end{cases}$.

▸ $m = 1 \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$: Hệ (1) $\Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ ($x \in \mathbb{R}$).

▸ $m = -1$: $D_x \neq 0 \Rightarrow$ Hệ (1) vô nghiệm.

Kết luận: + $m \neq 1$ và $m \neq -1$: $S = \left\{\left(\dfrac{9}{2(m+1)}; \dfrac{m-2}{2(m+1)}\right)\right\}$.

+ $m = 1$: $S = \{(x; 2 - x), x \in \mathbb{R}\}$.

+ $m = -1$: $S = \varnothing$.

7. Xác định giá trị của a để hệ vô nghiệm $\begin{cases}(a-1)x-4y=a\\2x+(a+5)y=a+2\end{cases}$ (*).

Ta có: $D = \begin{vmatrix}a-1 & -4\\2 & a+5\end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = (a + 1)(a + 3)$.

Hệ (*) vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a = -1$ hoặc $a = -3$.

Thử lại:

* $a = -1$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-4y=-1\\2x+4y=1\end{cases} \Leftrightarrow 2x + 4y = 1 \Rightarrow$ (*) có vô số nghiệm.

* $a = -3$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}-4x-4y=-3\\2x+2y=1\end{cases} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Vậy (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow a = -3$.

8. a) $\begin{cases}x+y=2\\2x^2+y+xy=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\2x^2+2-x+x(2-x)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\x^2+x-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm là (2; 0) và (–3; 5).

b) $\begin{cases}(x+2y+4)(x+2y+2)=0\\xy+y^2+3y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x=-2y-4\\(-2y-4)y+y^2+3y+6=0\end{cases}\right.$

$\left.\begin{cases}x=-2y-2\\(-2y-2)y+y^2+3y+6=0\end{cases}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x=-2y-4\\-y^2-y+6=0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x=-2y-4\\y=2 \vee y=-3\end{cases}\right.$

$\left.\begin{cases}x=-2y-2\\-y^2+y+6=0\end{cases}\right. \left.\begin{cases}x=-2y-2\\y=-2 \vee y=3\end{cases}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-8\\y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-8\\y=3\end{cases}$.

Vậy hệ có bốn nghiệm là (–8; 2), (–8; 3), (2; –3), (2; –2).

9. a) $\begin{cases} 3(x+y)=xy \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$ (1)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3S=P \\ S^2-2P=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3S \\ S^2-6S-40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-4 \\ P=-12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S=10 \\ P=30 \end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=-4 \\ P=-12 \end{cases} \Rightarrow$ x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2 + 4X - 12 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy hệ có hai nghiệm là (2; –6), (–6; 2).

b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$ (2)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} S+P=5 \\ S^2-P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2+S-12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S=-4 \\ P=9 \end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là (2; 1), (1; 2).

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$ (3). Điều kiện $xy \neq 0$.

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ 6(S^2-2P)=13P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là (2; 3), (3; 2).

10. a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13\end{cases}$. Điều kiện $xy \neq 0$.

Đặt $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ và $P=\dfrac{1}{xy}$ $(S^2-4P\geq 0)$.

Hệ trở thành $\begin{cases}S=5\\ S^2-2P=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=5\\ P=6\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}$ lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=2\\ \dfrac{1}{y}=3\end{cases}\vee\begin{cases}\dfrac{1}{x}=3\\ \dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases}(x+2y)^2+\dfrac{9}{(2x-y)^2}=10\\ \dfrac{x+2y}{2x-y}=1\end{cases}$ (I).

Đặt $u=x+2y$, $v=\dfrac{3}{2x-y}$.

Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}u^2+v^2=10\\ uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=10\\ uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=\pm 4\\ uv=3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=1\\ v=3\end{cases}\vee\begin{cases}u=3\\ v=1\end{cases}\vee\begin{cases}u=-1\\ v=-3\end{cases}\vee\begin{cases}u=-3\\ v=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=1\\ 2x-y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x+2y=3\\ 2x-y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x+2y=-1\\ 2x-y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x+2y=-3\\ 2x-y=-3\end{cases}$$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)\vee\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{5}\right)\vee\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)\vee\left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$

11. a) $\begin{cases}x^2+2y=xy+4\\ y^2+2x=xy+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2y-2x=0\\ y^2+2x=xy+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y-2)=0\\ y^2+2x=xy+4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + 2x = x^2 + 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 - x \\ (2-x)^2 + 2x = x(2-x) + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

b) $$\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 13y + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 9(x-y) \\ x^2 = 13x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-9) = 0 \\ x^2 = 13x + 4y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 17x \end{cases} \vee \begin{cases} y = 9 - x \\ x^2 = 13x + 4(9-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 17 \\ y = 17 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 9 - x \\ x^2 - 9x - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 17 \\ y = 17 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 12 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 12 \end{cases}.$$

12. a) $$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ 3y^2 + xy - 3x^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ 2y^2 + xy - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ (y+x)(2y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 - x^2 = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ 2(2y)^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ 7y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = -\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = \sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

b) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy \\ y(x+y) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 25 \\ x(x+y) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x.5 = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -5 \\ x.(-5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

c) $$\begin{cases} 2(x+y)^2 + 2(x-y)^2 = 5(x^2 - y^2) & (a) \\ x^2 + y^2 = 40 & (b) \end{cases}.$$

Đặt u = x + y và v = x – y.

(a) trở thành $2u^2 + 2v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$

$\Leftrightarrow (u - 2v)(2u - v) = 0 \Leftrightarrow u = 2v$ hoặc $v = 2u$.

$\Leftrightarrow x + y = 2(x - y)$ hoặc $x - y = 2(x + y) \Leftrightarrow x = 3y$ hoặc $x = -3y$.

- $x = 3y$: (b) $\Leftrightarrow 10y^2 = 40 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 6$.
- $x = -3y$: (b) $\Leftrightarrow 10y^2 = 40 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \mp 6$.

Vậy hệ có 4 nghiệm là (6; 2), (–6; –2), (–6; 2), (6; –2).

13. $\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+y^2=3a^2+2a-3 \end{cases}$ (1)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} S=2a-1 \\ S^2-2P=3a^2+2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2a-1 \\ 2P=a^2-6a+4 \end{cases}$

Hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 - 2(a^2 - 6a + 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 8a - 7 \geq 0$ (2)

Ta có $2P = (a-3)^2 - 5 \geq -5 \Rightarrow P \geq -\frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$ (thỏa (2)).

Vậy tích xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow a = 3$. Khi đó $\min(xy) = -\frac{5}{2}$.

14. $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases}$ (1)

Đặt S = x + y và P = xy. Điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} S=a \\ S^2-2P=6-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=a \\ P=a^2-3 \end{cases}$.

a) Khi a = 2: S = 2 và P = 1

$\Rightarrow$ x, y lần lượt là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1; 1).

b) (1) có nghiệm (x; y) $\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$.

Khi đó ta có $F = -a^2 + 3 + 2a = -(a-1)^2 + 4$.

Vì $-2 \leq a \leq 2$ nên $-3 \leq a - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (a-1)^2 \leq 9 \Rightarrow F \geq -5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a - 1 = -3 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy khi a = –2 thì F đạt GTNN và minF = –5.

15. $\begin{cases} 3x^2-2xy=16 \\ x^2-3xy-2y^2=8 \end{cases}$ (1) (I)

➢ x = 0: (1) trở thành 0 = 16 (vô lí).

➢ $x \neq 0$: Đặt y = kx, hệ trở thành:

$\begin{cases} 3x^2-2kx^2=16 \\ x^2-3kx^2-2k^2x^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2k)x^2=16 \quad (2) \\ (1-3k-2k^2)x^2=8 \quad (3) \end{cases}$

* $k = \frac{3}{2}$: $(2) \Leftrightarrow 0x^2 = 16$ (vô lí)

* $k \neq \frac{3}{2}$: Chia vế với vế của (3) cho (2), ta được:

$$\frac{1-3k-2k^2}{3-2k}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-6k-4k^2=3-2k$$

$$\Leftrightarrow 4k^2+4k+1=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}.$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 4x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy hệ có hai nghiệm là (2; –1) và (–2; 1).

16. $\begin{cases} x^4+2x^2y=3 \\ x^2+y^2+y=3 \end{cases}$ (*)

(*) $\Rightarrow x^4+2x^2y+y^2+x^2+y=6$

$$\Leftrightarrow (x^2+y)^2+(x^2+y)-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y=-3 \\ x^2+y=2 \end{array}\right.$$

➢ $x^2+y=-3$: (2) $\Leftrightarrow y^2=6 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6} \Rightarrow x^2=-3\pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

➢ $x^2+y=2$: (2) $\Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(1;1),(-1;1),(\sqrt{3};-1),(-\sqrt{3},-1)$

17. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$ (I)

Điều kiện: $x^2\geq y^2$.

Đặt $u=\sqrt{x^2-y^2}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+u=12 \\ yu=12 \\ x^2-y^2=u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+u=12-x \\ yu=12 \\ y^2+u^2=x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (y+u)^2-2yu=x^2$

$\Rightarrow (12-x)^2-24=x^2 \Leftrightarrow -24x+120=0 \Leftrightarrow x=5$.

(2) $\Leftrightarrow y^2(25-y^2)=144$

$\Leftrightarrow y^4-25y^2+144=0$

$\Leftrightarrow y^2=9$ hay $y^2=16 \Leftrightarrow y=3$ hay $y=4$.

Thử lại ta được (5; 3), (5; 4) là nghiệm.

18. $\begin{cases} (x^2+2x)(3x+y)=24 \\ x^2+5x+y-11=0 \end{cases}$ (I)

Đặt $u=x^2+2x$ và $v=3x+y$. Ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} uv=24 \\ u+v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=8 \end{cases} \vee \begin{cases} u=8 \\ v=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=3 \\ 3x+y=8 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+2x=8 \\ 3x+y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=17 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=15 \end{cases}.$$

19. $$\begin{cases} x+\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=2 \quad (1) \\ y+\sqrt{y}+\sqrt{y+4}=2 \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Điều kiện: $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

Ta có: Với $x \geq 0$ thì vế trái $(1) \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Với $y \geq 0$ thì vế trái $(2) \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 0$.

Vậy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(1)=2 \\ VT(2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là (0; 0).

20. $$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \quad (1) \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Ta có:

$$\text{Vế trái } (2) = x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2} \geqslant 2\sqrt{x^2.\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{y^2.\frac{1}{y^2}}=4$$

Do đó: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{x^2} \\ y^2=\dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$.

Thay các cặp (1; 1), (1; –1), (–1; 1) và (–1; –1) vào (1) ta được $x = y = 1$ thỏa (1).

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (1; 1).

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Khái niệm và tính chất của bất đẳng thức

1. Khái niệm bất đẳng thức:

Giả sử A, B là hai số thực. Các mệnh đề "A > B", "A < B", "A ⩾ B", "A ⩽ B" được gọi là những bất đẳng thức. Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

2. Tính chất của bất đẳng thức:

a. $A > B$ và $B > C \Rightarrow A > C$.

b. $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$.

c. * Nếu $C > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow AC > BC$.

* Nếu $C < 0$ thì $A > B \Leftrightarrow AC < BC$.

3. Các hệ quả: Từ các tính chất trên ta có các hệ quả sau:

a. $\left.\begin{matrix} A > B \\ C > D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A + C > B + D$.

b. $\left.\begin{matrix} A > B \geqslant 0 \\ C > D \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC > BD$.

c. Với $A.B > 0$ ta có: $A > B \Leftrightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$.

d. Với $A, B \geqslant 0, n \in \mathbb{N}^*$: $A > B \Leftrightarrow A^{2n} > B^{2n}$.

e. $\forall A, B$ và $n \in \mathbb{N}^*$: $A > B \Leftrightarrow A^{2n+1} > B^{2n+1}$.

f. $A > B \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$.

g. $A > B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Phương pháp biến đổi tương đương

1. Phương pháp

Để chứng minh một bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương, ta sử dụng các tính chất b), c) và các hệ quả c), d), e), f), g) để biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đúng đã biết hay có thể chứng minh được là đúng.

Nghĩa là: Để chứng minh bất đẳng thức $A_1 \geq B_1$ bằng phương pháp biến đổi tương đương ta thực hiện như sau:

$$A_1 \geq B_1 \Leftrightarrow A_2 \geq B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n \geq B_n.$$

Trong đó bất đẳng thức $A_n \geq B_n$ là bất đẳng thức đúng đã biết.

Vậy bất đẳng thức $A_1 \geq B_1$ được chứng minh.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c tùy ý. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$ (1)

Giải

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 4a - 4b - 4c \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 \geq 0$ (2).

Vì $(a - 2)^2 \geq 0$, $(b - 2)^2 \geq 0$ và $(c - 2)^2 \geq 0$ với mọi a, b, c nên (2) là bất đẳng thức đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi a, b, c $\in \mathbb{R}$, ta có:

a) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ (1)

b) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ (2)

Giải

a) Ta có:

(1) $\Leftrightarrow a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a - b) - b^3(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 . \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0 \text{ (1a).}$$

Ta thấy (1a) là bất đẳng thức đúng với mọi a, b nên (1) đúng.

Vậy (1) được chứng minh.

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 \geq 0$ (2a)

Ta thấy (2a) là bất đẳng thức đúng với mọi a, b, c nên (2) đúng.

Vậy (2) được chứng minh.

3. Bài tập

1. Chứng minh với các số thực a, b, c, d tùy ý, ta có:

a) $a^2 + b^2 + 3(a + b + 3) \geq ab$.

b) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$.

c) $a^2 + 3(b^2 + c^2 + d^2) \geq 2a(b + c + d)$

d) $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$.

2. Chứng minh với hai số thực a, b thỏa $a + b \geq 0$ ta có:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

b) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2} \right)^3$.

3. Chứng minh rằng với hai số thực a, $b \geq 0$, ta có:

a) $a + b + 1 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) $(a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$.

c) $\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}$.

4. Cho các số thực a, b, c, d sao cho $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Chứng minh:

a) $a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$.

b) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c - d)^2$.

5. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3-abc}{a+b+c} \geq 0$ với mọi a, b, c thoả $a + b + c \neq 0$.

6. Chứng minh rằng:

a) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

7. Cho $a > b > 0$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh: $\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

8. Cho $a > b > 0$ và $c > \sqrt{ab}$. Chứng minh rằng: $\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \geqslant \frac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$.

Vấn đề 2: Phương pháp biến đổi hệ quả

1. Phương pháp

Xuất phát từ những bất đẳng thức đúng đã biết hoặc bất đẳng thức mà ta có thể chứng minh được dễ dàng, sử dụng các tính chất và các hệ quả a), b), c) ... ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $x, y, z \in [-1; 2]$ và $x + y + z = 0$. Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$.

Giải

Ta có: $x \in [-1; 2] \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$ (a)

$y \in [-1; 2] \Rightarrow -1 \leq y \leq 2 \Rightarrow (y + 1)(y - 2) \leq 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 \leq 0$ (b)

$z \in [-1; 2] \Rightarrow -1 \leq z \leq 2 \Rightarrow (z + 1)(z - 2) \leq 0 \Rightarrow z^2 - z - 2 \leq 0$ (c)

Cộng theo vế (a), (b) và (c), ta được:

$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) - 6 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ (ĐPCM)

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: Nếu a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leqslant abc$ (2).

Giải

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên:

$a > |b - c| \Rightarrow a^2 \geqslant a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c) > 0$ (2a)

$b > |c - a| \Rightarrow b^2 \geqslant b^2 - (c - a)^2 = (b + c - a)(b - c + a) > 0$ (2b)

$c > |a - b| \Rightarrow c^2 \geqslant c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(c - a + b) > 0$ (2c)

Nhân theo vế của (2a), (2b) và (2c) ta được:

$a^2b^2c^2 \geqslant (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2$

$\Rightarrow abc \geqslant (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$ (ĐPCM)

3. Bài tập

1. Cho a, b, c, d là bốn số thực thỏa $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ nếu b, d > 0.

2. a) Chứng minh rằng nếu $x \geq y > 0$ thì $\frac{x}{1+x} \geqslant \frac{y}{1+y}$.

b) Chứng minh rằng với a, b tùy ý, ta có: $\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \geqslant \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$

3. Cho a, b, c, d là bốn số dương. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

4. Cho a, b, c thuộc [0; 1]. Chứng minh rằng:

$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$.

5. Cho a, b, c là ba số thuộc [0; 1]. Chứng minh: $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leqslant 2$

6. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Chứng minh $(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) \geqslant abcd$.

7. a) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương k ta có:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$

8. a) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên k > 1, ta có: $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} < 2.$

Vấn đề 3: Phương pháp áp dụng bất đẳng thức Cô-si

1. Phương pháp

Gặp các bất đẳng thức trong đó có chứa *tổng, tích của các số không âm* ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cô-si sau đây để chứng minh.

a) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm:

Cho $a \geqslant 0$ và $b \geqslant 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ **(1).**

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên là:

$* a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ $\qquad * ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(\forall a, b)$

$* ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ $(\forall a, b)$ $\qquad * a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(\forall a, b)$

b) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm:

Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên là:

$* a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

$* abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

$* abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$ $(\forall a, b, c \geq 0)$

$* a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ $(\forall a, b, c \geq 0)$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b là hai số dương. Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a và b ta được:

$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0$ (a)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$ ta được:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}} > 0 \qquad \text{(b)}$$

Nhân theo vế của (a) và (b) ta được:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (ĐPCM)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh:

$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a^2 và b^2 ta được:

$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq 0$ (a)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm b^2 và c^2 ta được:

$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2} = 2|bc| \geq 0 \qquad (b)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm c^2 và a^2 ta được:

$$c^2 + a^2 \geq 2\sqrt{c^2a^2} = 2|ca| \geq 0 \qquad (c)$$

Nhân theo vế của (a), (b) và (c) ta được:

$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$ (ĐPCM).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh:

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$. b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{a^2}{b^2}$ và $\frac{b^2}{c^2}$ ta được:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2c^2}} = 2.\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c} \qquad (a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{b^2}{c^2}$ và $\frac{c^2}{a^2}$ ta được:

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2c^2}{c^2a^2}} = 2.\left|\frac{b}{a}\right| \geq 2\frac{b}{a} \qquad (b)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{c^2}{a^2}$ và $\frac{a^2}{b^2}$ ta được:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{c^2a^2}{a^2b^2}} = 2.\left|\frac{c}{b}\right| \geq 2\frac{c}{b} \qquad (c)$$

Cộng theo vế của (a), (b) và (c) ta được:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \text{ (ĐPCM)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các cặp hai số dương:

$\frac{a^2}{b^2}$ và 1, $\frac{b^2}{c^2}$ và 1, $\frac{c^2}{a^2}$ và 1

ta được: $\frac{a^2}{b^2} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = 2\left|\frac{a}{b}\right|$

$\frac{b^2}{c^2} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c^2}} = 2\left|\frac{b}{c}\right|$

$$\frac{c^2}{a^2}+1\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=2\left|\frac{c}{a}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3\geq 2\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|+\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-3$$

$$\geq \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|+3\sqrt[3]{\left|\frac{a}{b}\right|.\left|\frac{b}{c}\right|.\left|\frac{c}{a}\right|}-3$$

$$=\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ \text{(ĐPCM)}$$

Ví dụ 4: Cho x > 3. Chứng minh: $9x+\frac{4}{x-3}\geq 39$ (1).

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 9(x-3)+\frac{4}{x-3}+27\geq 39 \Leftrightarrow 9(x-3)+\frac{4}{x-3}\geq 12$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương 9(x – 3) và $\frac{4}{x-3}$ ta được:

$$9(x-3)+\frac{4}{x-3}\geq 2\sqrt{9(x-3).\frac{4}{x-3}}=12$$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 9(x-3)=\frac{4}{x-3} \Leftrightarrow x-3=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{11}{3}$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương a, b và c ta được:

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}>0$ (a)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ và $\frac{1}{c}$ ta được:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}>0 \quad \text{(b)}$$

Nhân theo vế của (a) và (b) ta được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (ĐPCM)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 6: Cho x, y, z là ba số không âm thỏa xyz = 1.

Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$ (1).

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm x^3, 1 và 1 ta được:

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3} = 3x \qquad (a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm y^3, 1 và 1 ta được:

$$y^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^3} = 3y \qquad (b)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm z^3, 1 và 1 ta được:

$$z^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{z^3} = 3z \qquad (c)$$

Cộng theo vế của (a), (b) và (c) ta được:

$x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3x + 3y + 3z$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z + 2(x + y + z) - 6$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm x, y và z ta được:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$ (ĐPCM)

Ví dụ 7: Cho $a > b > 0$. Chứng minh: $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$.

Giải

Ta có: $a+\frac{1}{b(a-b)} = (a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)}$ (a)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương a – b, b và $\frac{1}{b(a-b)}$ ta được:

$$(a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b).b.\frac{1}{b(a-b)}} = 3 \qquad (b)$$

Từ (a) và (b) ta suy ra $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$ (ĐPCM).

3. Bài tập

1. Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

a) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \geq a + b + c$ b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$.

2. Chứng minh với các số thực a, b, c tùy ý, ta có:

a) $(a^2 + 1)(b^2 + c^2)(b^2 + 1) \geq 8ab^2c^2$

b) $16ab(a - b)^2 \leq (a + b)^4$.

3. Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

a) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$

b) $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geq\frac{9}{a+b+c}$

c) $\frac{3}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\right)$.

d) $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

4. Chứng minh rằng: Nếu ΔABC có các cạnh thỏa điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}$

thì ΔABC đều.

5. Cho a, b, c ≥ 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

a) (1 − a)(1 − b)(1 − c) ≥ 8abc b) 16abc ≤ a + b.

6. Cho a > 0 và b > 0 thỏa a + b ≤ 1. Chứng minh:

a) $a^2b\leq\frac{4}{27}$ b) $ab+\frac{1}{ab}\geq\frac{17}{4}$.

7. Cho a ≥ 9, b ≥ 4, c ≥ 1. Chứng minh rằng: $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}\leq\frac{11abc}{12}$.

8. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c; h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp Δ ABC; p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(p-a)(p-b)\leq\frac{c^2}{4}$ b) $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. d) $h_a + h_b + h_c \geq 9.r$.

9. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh:

a) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}\geq a+3b$. b) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\geq\frac{1}{9}(64c-a-b)$.

10. Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình: $x+y+z+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}$

Vấn đề 4: Phương pháp áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

1. Phương pháp

a) Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số:

Với 4 số $\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix}$ **ta có:** $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow bx = ay \Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ **(nếu** $a,b\neq 0$**).**

b) Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 6 số:

Với 6 số $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ **ta có:** $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow bx = ay$ **và** $cx = az \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **(nếu** $a, b, c \neq 0$**).**

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho x, y là hai số thỏa $4x^2 + 9y^2 = 45$.

Chứng minh $|6x + 3y| \leq 15$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho bốn số 2, 1, 2x, 3y ta có:

$$|2.2x + 1.3y| \leq \sqrt{2^2 + 1^2}.\sqrt{(2x)^2 + (3y)^2}$$
$$\leq \sqrt{5}.\sqrt{4x^2 + 9y^2}$$
$$\leq \sqrt{5}.\sqrt{45} = 15.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2} = \frac{3y}{1} \\ 4x^2 + 9y^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 4.9y^2 + 9y^2 = 45 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Cho x, y là hai số thỏa $6x + 12y = 5$. Chứng minh: $4x^2 + 9y^2 \geq 1$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho bốn số 3, 4; 2x, 3y ta có:

$$5 = 6x + 12y = 3.2x + 4.3y$$
$$\leq \sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{(2x)^2 + (3y)^2}$$
$$\leq \sqrt{25}.\sqrt{4x^2 + 9y^2}$$

$\Rightarrow 5\sqrt{4x^2 + 9y^2} \geq 5 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 \geq 1$ (ĐPCM).

Ví dụ 3: Cho a, b, c là ba số thỏa $a^2 + 3b^2 + 9c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}b + 3\sqrt{5}c \leq 3.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 6 số $\sqrt{2}$; 2; $\sqrt{5}$; a; $\sqrt{3}b$; $3c$ ta được:

$$\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}b + 3\sqrt{5}c = \sqrt{2}.a + 2.\sqrt{3}b + \sqrt{5}.3c$$
$$\leq \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2 + (\sqrt{5})^2}.\sqrt{a^2 + 3b^2 + 9c^2} = 3$$

Vậy $\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}b + 3\sqrt{5}c \leq 3$ (ĐPCM).

Ví dụ 4: Cho x, y, z là ba số dương thỏa: $2x + 3y + 16z = 49$. Chứng minh:

$T = \frac{2}{x} + \frac{75}{y} + \frac{64}{z} \geq 49$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 6 số ta có:

$$T.49 = \left(\frac{2}{x} + \frac{75}{y} + \frac{64}{z}\right)(2x + 3y + 16z)$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 + \left(\sqrt{3y}\right)^2 + \left(4\sqrt{z}\right)^2\right]$$

$$\geq \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.\sqrt{2x} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{y}}.\sqrt{3y} + \frac{8}{\sqrt{z}}.4\sqrt{z}\right)^2 = (2 + 15 + 32)^2 = 49^2$$

$\Rightarrow T \geq 49$ (ĐPCM).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2}/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{75}/\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{z}}{8/\sqrt{z}} \\ 2x + 3y + 16z = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} \\ 2x + 3y + 16z = 49 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1; y = 5$ và $z = 2$.

3. Bài tập

1. Cho x, y thỏa mãn $3x + 4y = 7$. Chứng minh:

a) $x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$ b) $3x^2 + 4y^2 \geq 7$ c) $\frac{1}{3x} + \frac{4}{y} \geq \frac{25}{7}$.

2. Cho x, y thỏa mãn $4x^2 + 9y^2 = 13$. Chứng minh:

a) $x + y \leq \frac{13}{6}$ b) $2x + 3y \leq \sqrt{26}$ c) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{25}{13}$.

3. Cho x, y thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh:

a) $x^2 + y^2 \geq 2$ b) $x^4 + y^4 \geq 2$.

4. Cho $a > c > 0$ và $b > c > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

5. Cho a, b, c, x, y, z > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{x + y + z}$.

6. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

7. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng: $x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

8. Cho biết phương trình $(x + a)^2 + (y + b)^2 + (x + y)^2 = c^2$ có nghiệm.
Chứng minh rằng: $(a + b)^2 \leq 3c^2$.

Vấn đề 5: Phương pháp chứng minh bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng hai bất đẳng thức sau để chứng minh:

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a) $|A+B| \leqslant |A|+|B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geqslant 0$.

b) $\big||A|-|B|\big| \leqslant |A-B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geqslant 0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho x, y là hai số thực, chứng minh: $|3-x+y|+|y-x-2| \geqslant 5$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A + B|$ ta được:

$|3 - x + y| + |y - x - 2| = |3 - x + y| + |-y + x + 2|$

$\geq |(3 - x + y) + (-y + x + 2)| = 5.$

Vậy $|3-x+y|+|y-x-2| \geqslant 5$ (ĐPCM)

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $\sqrt{5+5x^2}+|2-x| \geqslant 4$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A + B|$, ta được:

$$\sqrt{5+5x^2}+|2-x| = \sqrt{(2^2+1^2)(1^2+x^2)}+|2-x|$$

$$\geq |2.1 + 1.x| + |2 - x|$$

$$\geq |2 + x + 2 - x| = 4.$$

Vậy $\sqrt{5+5x^2}+|2-x| \geq 4$ (ĐPCM)

3. Bài tập

1. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sqrt{x^2+2x+y^2+4y+5}+\sqrt{x^2+4x+y^2-6y+13} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

2. Chứng minh: $\sqrt{x^2+4y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\dfrac{|1-y|}{\sqrt{2}} \geqslant 2\sqrt{2}$, $\forall$ x, y.

3. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}+\sqrt{x^2+y^2+4y+4}+|x-4| \geq 3-\sqrt{3}.$$

§2. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho f(x) là biểu thức theo x với $x \in \mathbb{R}$.

a) Số M được gọi là **GTLN** của f(x) trên X $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X: \ f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in X: f(x_0) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in X} f(x)$.

b) Số m được gọi là **GTNN** của f(x) trên X $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X: \ f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in X: f(x_0) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in X} f(x)$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Phương pháp

Phương pháp tìm **GTLN, GTNN của biểu thức f(x) trên tập X** bằng cách sử dụng bất đẳng thức:

Bước 1: Tìm một ***hằng số*** M (hay m) sao cho $f(x) \leq M$ (hay $f(x) \geq m$), $\forall x \in X$ bằng cách sử dụng các bất đẳng thức đã biết hoặc biến đổi f(x) về dạng:

$f(x) = M - g^2(x)$ (hay $f(x) = m + g^2(x)$)

Bước 2: Tìm $x_0 \in X$ để cho dấu " = " xảy ra.

Bước 3: Kết luận.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm GTNN của $f(x) = x + 2 - 6\sqrt{x-1}$ với $x \geq 1$.

Giải

Ta có: $f(x) = (x-1) - 6\sqrt{x-1} + 9 - 6 = \left(\sqrt{x-1} - 3\right)^2 - 6 \geq -6$.

$f(x) = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = -6$, đạt được khi x = 10.

Ví dụ 2: Tìm GTLN của $A = 4xy - 2x^2 - 4y^2 + 4x + 2$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta có:

$A = (-x^2 + 4xy - 4y^2) + (-x^2 + 4x - 4) + 6 = -(x - 2y)^2 - (x - 2)^2 + 6 \leq 6$.

$A = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy $\max f(x) = 6$, đạt được khi x = 2 và y = 1.

Ví dụ 3: Tìm GTNN của $f(x) = 2x + \dfrac{27}{x^2}$ với $x > 0$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$f(x) = 2x + \frac{27}{x^2} = x + x + \frac{27}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x.x.\frac{27}{x^2}} = 9.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{27}{x^2} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 9$, đạt được khi $x = 3$.

Ví dụ 4: Tìm GTNN, GTLN của $f(x) = \sqrt{x-2} + 3\sqrt{12-x}$ trên [2; 12]

Giải

Ta có: $f(x) = 1.\sqrt{x-2} + 3.\sqrt{12-x} \leq \sqrt{1^2+3^2}.\sqrt{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 + \left(\sqrt{12-x}\right)^2} = 10.$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\sqrt{x-2}}{1} = \frac{\sqrt{12-x}}{3} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy $\max\limits_{[2;12]} f(x) = 10$, đạt được khi $x = 3$.

Mặt khác:

$$\left[f(x)\right]^2 = x - 2 + 9(12-x) + 6\sqrt{(x-2)(12-x)}$$
$$\geq 106 - 8x \text{ (Do } \sqrt{(x-2)(12-x)} \geq 0)$$
$$\geq 106 - 8.12 = 10 \text{ (Do } x \leq 12 \text{ nên } -8x \geq -8.12)$$

$\Rightarrow f(x) \geq \sqrt{10}$.

Khi $x = 12$ thì $f(x) = \sqrt{10}$. Vậy $\min\limits_{[2;12]} f(x) = \sqrt{10}$, đạt được khi $x = 12$.

3. Bài tập

1. Tìm GTNN của:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 16}{x}$ với $x > 0$

b) $f(x) = 7x + \frac{3x+7}{x+1}$ với $x > -1$.

c) $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với $x, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$.

2. Tìm GTLN của:

a) $y = x^2(3 - x)$ với $0 \leq x \leq 3$

b) $A = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$ với $x, y, z \geq -1$ và $x + y + z = 1$.

c) $B = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$ với $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$.

3. Cho a, b, c ≥ 0 và a + b + c = 1. Tìm GTLN của M = abc(a + b)(b + c)(c + a).

4. Cho x, y là các số thực. Tìm GTNN của biểu thức:

$$M = \sqrt{(1-x)^2+y^2} + \sqrt{(1+x)^2+y^2} + |2-y|.$$

5. Cho a, b, c > 0 và a + b + c $\leq$ 1.

a) Tìm GTLN của $T = \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$.

b) Tìm GTNN của $M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$.

6. Cho a, b, c > 0 và $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$ (1). Tìm GTLN của P = abc.

7. Tìm GTLN và GTNN của $P = \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$.

§3. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Khái niệm bất phương trình một ẩn:

1. Định nghĩa

Cho hai hàm số y = f(x) và y = g(x) có tập xác định lần lượt là D_f và D_g.

Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng:

$f(x) < g(x), f(x) > g(x), f(x) \leq g(x), f(x) \geq g(x)$

được gọi là **bất phương trình một ẩn**; x gọi là **ẩn số** (hay **ẩn**) và D gọi là **tập xác định** của bất phương trình đó.

Ví dụ 1: Tập xác định của bất phương trình $\sqrt{3-x} \geq \sqrt{x-1} + 3$ là D = [1; 3].

Chú ý:

Trong thực hành, thông thường ta không cần viết rõ tập xác định D mà chỉ cần nêu **điều kiện** để $x \in D$.

Ví dụ 2: Điều kiện xác định của bất phương trình:

- $\sqrt{x-2} + \sqrt{9-x^2} > 3$ là $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$
- $\frac{\sqrt{2-x}}{x-1} > \sqrt{x} + 1$ là $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

2. Nghiệm của bất phương trình:

Số $x_0 \in D$ gọi là một **nghiệm** của bất phương trình nếu khi thay x bởi x_0 vào bất phương trình ta được một mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

II. Bất phương trình tương đương

1. Định nghĩa

Hai bất phương trình được gọi là **tương đương** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết

$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$.

2. Biến đổi tương đương các bất phương trình

* Phép biến đổi *biến một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương với nó* được gọi là một phép *biến đổi tương đương*.

* Định lí sau cho ta một số phép biến đổi tương đương các bất phương trình thường sử dụng:

Định lí: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D. Khi đó, trên D bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình sau:

a) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

b) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$.

c) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in D$.

Hệ quả: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D.

a) Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc ba: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3$.

b) Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc hai:

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ **không âm** $\forall x \in D$ thì: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

1. Phương pháp

Tương tự như phương trình, khi tìm điều kiện xác định của bất phương trình ta cũng cần chú ý các điều kiện sau: $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.

$\frac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$.

$\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B > 0$.

2. Ví dụ

Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau:

a) $x + \frac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 2 - \frac{2}{x-4}$ b) $\sqrt{2-x} + x \leq 2 + \sqrt{x}$.

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 2-x \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

3. Bài tập

Tìm điều kiện của các bất phương trình sau:

1. $3x+\dfrac{3}{\sqrt{x-2}} \leqslant 2+\dfrac{x}{x-3}$

2. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} \geqslant 3+\dfrac{4}{(x-2)^2}$

3. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{(x-3)(x+4)} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{6-x}}$

4. $\dfrac{\sqrt{x-3}}{|x|-\sqrt{x+2}} \geqslant \sqrt{16-2x}$.

Vấn đề 2: Xét sự tương đương của hai bất phương trình cho trước

1. Phương pháp

Ta so sánh hai tập nghiệm của hai bất phương trình và dựa vào định nghĩa để kết luận.

2. Ví dụ

Xét xem hai bất phương trình sau có tương đương không? Giải thích.

a) $\sqrt{x-1} \leqslant 0$ **(1)** và $x-1 \leqslant 0$ **(2)**

b) $x^2+x+1<0$ **(3)** và $x^2-2x+2 \leqslant 0$ **(4)**

Giải

a) (1) và (2) không tương đương vì $x = 2$ là một nghiệm của (2) nhưng $x = 2$ không là nghiệm của (1).

b) (3) và (4) tương đương với nhau vì chúng có tập nghiệm bằng nhau (tập nghiệm của hai bất phương trình đều bằng $\varnothing$).

3. Bài tập

1. Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình sau:

a. $4x-6+\dfrac{1}{x-2} \geqslant 2+\dfrac{1}{x-2}$ và $4x-8 \geqslant 0$.

b. $(x^2-4x+5)(x-5)>0$ và $x-5>0$.

c. $x-12 \geqslant 0$ và $(x-12)^2 \geqslant 0$.

d. $\sqrt{(x-1)(x-2)} \geqslant x$ và $\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2} \geqslant x$.

2. Để giải bất phương trình $\sqrt{x-3} \geqslant \sqrt{3x-5}$ bạn Bình đã làm như sau:

Do hai vế của bất phương trình đều không âm nên:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{3x-5}\right)^2 \Leftrightarrow x-3 \geqslant 3x-5 \Leftrightarrow 2x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \leqslant 1$.

Theo em, bạn Bình giải đúng hay sai? Giải thích.

Vấn đề 3: Giải bất phương trình

1. Phương pháp

Đặt điều kiện cho bất phương trình. Biến đổi bất phương trình tương đương với bất phương trình đơn giản hơn. Từ đó tìm được nghiệm của bất phương trình.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\frac{(10-x)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} > 4$ (1)

Giải

* Điều kiện: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.
* Với điều kiện trên thì

(1) $\Leftrightarrow 10 - x > 4 \Leftrightarrow x < 6$.

So sánh với điều kiện ta được (1) có nghiệm là $4 < x < 6$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $x^2 + 2 + \frac{4}{x^2+2} = 3 - (x-1)^2$ (*)

Giải

Ta có: Vế trái (*) $\geq 2\sqrt{(x^2+2).\frac{4}{x^2+2}} = 4$; Vế phải (*) ≤ 3.

Vậy (*) vô nghiệm.

3. Bài tập

1. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $(x-3)\sqrt{-x-10} > (x^4+1)\sqrt{x^2-16}$.

b) $\sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} < 4$.

c) $\sqrt{4x^2+4x+2} + \sqrt{x^2-6x+10} < 2$.

d) $x + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+1} - 1 \leq 0$.

2. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$

b) $\sqrt{x-1} < 3 + \sqrt{x-1}$

c) $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \frac{4}{\sqrt{x-4}}$

d) $(x+5)\sqrt{(x-3)(x^2-10x+25)} > 0$.

3. Không giải phương trình chứng minh các bất phương trình sau nghiệm đúng mọi x.

a) $x^4 - 4x^2 + 6 > 0$

b) $(2x-3)^2(x^2-2x+2) \geq 0$

c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$

d) $5x^2 + (x-2)^2 + \frac{2}{x^2+1} \geq x^2$

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình sau khi thu gọn có một trong các dạng sau: $\mathbf{ax + b > 0;\ ax + b < 0;\ ax + b \geqslant 0;\ ax + b \leqslant 0}$

trong đó a, b là hai số cho trước với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn là một hệ gồm hữu hạn các bất phương trình bậc nhất một ẩn. Nghiệm của hệ là tất cả các giá trị của ẩn thỏa mãn đồng thời tất cả các bất phương trình của hệ.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

***Vấn đề 1:* Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn**

1. Phương pháp

Giải và biện luận hai bất phương trình sau:

1) $ax + b > 0$ (1):

- $a > 0$: $(1) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$.
- $a < 0$: $(1) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$.
- $a = 0$: $(1) \Leftrightarrow 0x + b > 0$
  - $b > 0$: $(1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.
  - $b \leq 0$: $(1) \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

2) $ax + b \leqslant 0$ (2):

- $a > 0$: $(2) \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$.
- $a < 0$: $(2) \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$.
- $a = 0$: $(2) \Leftrightarrow 0x + b \leq 0$
  - $b \leqslant 0$: $(2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.
  - $b > 0$: $(2) \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Các bất phương trình còn lại biện luận tương tự.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình $x + 3m > 3 + mx$ (1)

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (m - 1)x + 3 - 3m < 0 \Leftrightarrow (m - 1)x < 3(m - 1)$.

- $a > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$: $(1) \Leftrightarrow x < 3$.
- $a < 0 \Leftrightarrow m < 1$: $(1) \Leftrightarrow x > 3$.
- $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$: $(1) \Leftrightarrow 0x < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Kết luận: + $m > 1$: $S = (-\infty; 3)$.
+ $m < 1$: $S = (3; +\infty)$.
+ $m = 1$: $S = \varnothing$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình $9m^2 + x \leq mx + 9$ (2)

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow (m-1)x \geq 9m^2 - 9$.

* $a > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$: (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{9m^2-9}{m-1} = 9(m+1)$.

* $a < 0 \Leftrightarrow m < 1$: (2) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{9m^2-9}{m-1} = 9(m+1)$.

* $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (2) $\Leftrightarrow 0x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: + $m > 1$: $S = [9(m+1); +\infty)$.
+ $m < 1$: $S = (-\infty; 9(m+1)]$.
+ $m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

3. Bài tập

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x+2}{3} + x - 3 > x - 2$ b) $\dfrac{3x+5}{2} - 1 \leqslant \dfrac{x+2}{3} + x$

c) $(1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$ d) $(x + \sqrt{3})^2 \geqslant (x - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}$.

2. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $mx + 6 < 2x + 3m$ b) $2(x - m) - (m + 1)^2 \geqslant 3 - mx$.

c) $2x + m^2 \geqslant mx + 3m - 2$ d) $5(m + 10x + 2 < 3m + 4x$.

Vấn đề 2: Điều kiện của tham số để bất phương trình thỏa điều kiện cho trước

1. Phương pháp

Cần lưu ý các điều kiện sau:

- Bất phương trình $ax + b > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$.
- Bất phương trình $ax + b \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Bất phương trình $ax + b > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- Bất phương trình $ax + b \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho bất phương trình $(2m^2 - m)x + 5m \geqslant (m^2 + 2)x - 1 + 3m$ (1).
Định m để (1) thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x + 2m + 1 \geq 0$

Do đó: (1) thỏa với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 2 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = 2$.

Ví dụ 2: Định m để bất phương trình $mx - 16 \geq 2(x - m^3)$ (2) có tập nghiệm là $[-38, +\infty)$.

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow (m - 2)x \geq 16 - 2m^3 = 2(8 - m^3)$

Vì bất phương trình (2) có dạng $ax + b \geq 0$ nên:

(2) có tập nghiệm là $[-38; +\infty) \Rightarrow a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{2(8 - m^3)}{m - 2} = -2(4 + 2m + m^2)$

Suy ra tập nghiệm của (2) là $S = [-2(4 + 2m + m^2); +\infty)$.

Do đó $S = [-38; +\infty) \Leftrightarrow -2(4 + 2m + m^2) = -38$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 4 = 19 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0$

$\Leftrightarrow m = 3$ (nhận) hay $m = -5$ (loại).

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = 3$.

3. Bài tập

1. Tìm tất cả các giá trị m để các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $(m^2 + m + 1)x - 5m \geq (m^2 + 2)x - 3m - 1$

b) $(m^2 - m)x + m < 2x + 1$.

c) $(m - 1)x \geq 2m - 1$

d) $(m - 1)x > m^2 - 1$.

2. Tìm tất cả các giá trị m để các bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $m^2(x - 1) \geq 9x + 3m - 4$

b) $\sqrt{(m^2 - 4)x - m + 3} \geq 2$

c) $(m^2 - 2m - 8)x > m^2 + 3m$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{mx + m^2 + m}} \leq 1$.

3. Tìm m để bất phương trình

$\sqrt{4 - x}\left[(m^2 + 1)x - 5m\right] \geq 0$ có tập nghiệm là $[2, 4]$.

4. Định m để bất phương trình $(m + 2)x > m^2 - m - 6$

a) nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

b) có nghiệm là $x > 0$.

5. Cho bất phương trình $mx - m - 4 < 0$. Định m để:

a) bất phương trình có nghiệm.

b) bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x < 3$.

6. Định m để hai bất phương trình tương đương:

$(m-1)x+3-m>0$ và $(m+1)x+2-m>0$

Vấn đề 3: Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Phương pháp

Giải hệ bất phương trình một ẩn, chẳng hạn $\begin{cases} f(x)<0 & (1) \\ g(x)>0 & (2) \end{cases}$ (I), là tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình (1) và (2).

Để giải hệ bất phương trình (I), ta làm các bước sau:

* Giải (1) để tìm tập nghiệm S_1.
* Giải (2) để tìm tập nghiệm S_2.
* Tập nghiệm của (I) là $S = S_1 \cap S_2$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 9x-12 \geq 4x+15 \\ 19-3x<7+5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-4<3x-1 \\ (2-x)^2<(x-4)^2 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 9x-12 \geq 6x+15 & (1) \\ 19-3x<7+x & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 9$. Suy ra $S_1 = [9; +\infty)$

(2) $\Leftrightarrow 4x > 12 \Leftrightarrow x > 3$. Suy ra $S_2 = (3; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = [9; +\infty)$.

b) $\begin{cases} 2x-4<3x-1 \\ (2-x)^2 \leq (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x<3 \\ 4-4x+x^2 \leq x^2-8x+16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ 4x \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq 3$. Vậy tập nghiệm của hệ là $S = (-3; 3]$.

Ví dụ 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x-7 \leq 0 & (1) \\ mx \geq m+12 & (2) \end{cases}$

a) Định m để hệ có nghiệm.

b) Định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x \leq 7$. Do đó $S_1 = (-\infty; 7]$.

Xét (2): * $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x \geq 12 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ nên $S_2 = \varnothing$.

* $m > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{m+12}{m} = \alpha$ nên $S_2 = [\alpha; +\infty)$.

* $m < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x \leq \alpha$ nên $S_2 = (-\infty; \alpha]$.

a) Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m>0 \\ \alpha \leqslant 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m>0 \\ \dfrac{m+12}{m} \leqslant 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m>0 \\ m+12 \leqslant 7m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m \geqslant 2 \end{array}\right.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow$ m < 0 hoặc m ≥ 2.

b) (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \alpha = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \dfrac{m+12}{m} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$ m = 2.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow$ m = 2.

Ví dụ 3: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x-m \geqslant 1 & (1) \\ (x+1)^2+2 \leqslant x^2+x+2m & (2) \end{cases}$ (I).

a) Định m để hệ vô nghiệm.

b) Định m để hệ có tập nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1.

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ x > m + 1. Suy ra $S_1 = [m+1; +\infty)$.

(2) $\Leftrightarrow$ x ≤ 2m − 3. Suy ra $S_2 = (-\infty; 2m-3]$.

a) Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow 2m-3 < m+1 \Leftrightarrow m < 4$.

b) Hệ (I) có tập nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1

$\Leftrightarrow (2m-3)-(m+1) = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

3. Bài tập

1. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{5x-7}{3} \geqslant 3-x \\ \dfrac{1+22x}{13} < 3x+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2-3x+6 \\ x^3-6x^2-7x+11 < (x-2)^3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-1 \leqslant 2x-3 \\ 3x < x+8 \\ \dfrac{9-3x}{2} \leqslant x-3 \end{cases}$.

2. Tìm tất cả các giá trị m để các hệ bất phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} 4x-5 > -x+2 \\ 3x+6m \leqslant 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4(x-3)+1 \leqslant 3(x-3) \\ x+m \geqslant 1 \end{cases}$.

3. Tìm tất cả các giá trị m để các hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $\begin{cases} 2x+7 < 8x-5 \\ m+5 > 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2 \geqslant x^2+7x+17 \\ 2\sqrt{m} \leqslant 8+2x \end{cases}$.

4. Tìm tất cả các giá trị m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} 3x+5 \geqslant x-1 \\ (x+2)^2 \leqslant (x-1)^2+9 \\ m^2x+1 > (3m-2)x+m \end{cases}$$

5. Định m để các hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} 2m(x+1) \geqslant -2x+3 \\ 2mx+3 \geqslant 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+3}{x} \geqslant x \\ m(x-1) \geqslant 2 \end{cases}$.

6. Định m để hàm số $f(x) = \sqrt{2x-m-3} - \sqrt{2m+3-x}$

a) có tập xác định là [2; 5].

b) xác định với mọi $x \in [2; 5]$.

§5. DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó:

a) Định nghĩa: Nhị thức bậc nhất theo biến x là biểu thức có dạng **f(x) = ax + b** trong đó a, b là hai số cho trước với $a \neq 0$.

Ví dụ 1:

- $f(x) = 2x + 5$; $g(x) = -4x + 7$ và $h(x) = -5x$ là các nhị thức bậc nhất.
- $k(x) = 2x^2 + 3x + 1$ không là nhị thức.

b) Nghiệm của nhị thức bậc nhất:

* Nghiệm của phương trình f(x) = 0 được gọi là nghiệm của nhị thức f(x).

* Nhị thức f(x) = ax + b có nghiệm duy nhất là $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Ví dụ 2:

- Nghiệm của nhị thức $f(x) = 8 - 4x$ là $x = 2$.
- Nghiệm của nhị thức $h(x) = (m^2 + 3)x - 3m + 5$ là $x = \dfrac{3m+5}{m^2+1}$.

c) Dấu của nhị thức bậc nhất:

Xét nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Ta có: $a.f(x) = a^2(x + \dfrac{b}{a})$

Suy ra:
- f(x) cùng dấu với a khi $x > -\dfrac{b}{a}$.
- f(x) trái dấu với a khi $x < -\dfrac{b}{a}$.

Định lí: Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$

*** $f(x)$ cùng dấu với a với $x > -\frac{b}{a} = x_0$.**

*** $f(x)$ trái dấu với a với $x < -\frac{b}{a} = x_0$.**

Kết quả định lí thể hiện trong bảng tóm tắt sau:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	**trái dấu với a**	0	**cùng dấu với a**

Cách nhớ: Trong trái dấu với a, ngoài cùng dấu a.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Xét dấu một biểu thức

1. Phương pháp

a) Xét dấu một nhị thức:

* Tìm nghiệm của các nhị thức.

* Xét dấu của a.

* Dựa vào định lí về dấu nhị thức để lập bảng xét dấu của nhị thức. Từ đó suy ra dấu của nhị thức trên các khoảng chia.

b) Xét dấu một biểu thức:

* Biến đổi biểu thức thành tích hay thương của các nhị thức bậc nhất.

* Xét dấu từng nhị thức bậc nhất.

* Sử dụng quy tắc nhân, chia các dấu để suy ra dấu của biểu thức.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 2x + 6$ b) $g(x) = -3x + 5$

c) $h(x) = (m^2 + 1)x - m$ d) $k(x) = 4m - (m^2 + 2m + 2)x$.

Giải

a) $f(x) = 2x + 6$:

* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x) = 2x + 6$		$-$	0	$+$	

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$.

b) $g(x) = -3x + 12$.

* $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x) = -3x + 12$		$+$	0	$-$	

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 4$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 4$.

c) $h(x) = (m^2 + 1)x - m$

* $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{m^2+1}$.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{m^2+1}$		$+\infty$
h(x)		$-$	0	$+$	

Vậy: $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{m}{m^2+1}$.

$h(x) < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{m}{m^2+1}$.

d) $k(x) = 4m - (m^2 + 2m + 2)x$.

* $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4m}{m^2-2m+2}$ (Vì $m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 \geq 1$)

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{4m}{m^2-2m+2}$		$+\infty$
k(x)		$+$	0	$-$	

Vậy: $k(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{4m}{m^2-2m+2}$.

$k(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{4m}{m^2-2m+2}$.

Ví dụ 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = (2x + 4)(x - 1)(6 - 2x)$. b) $g(x) = \dfrac{x^2 - (2x-6)^2}{(1-x)(4+x)}$

Giải

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		3		$-\infty$
$2x + 4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$6 - 2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
f(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2-(2x-3)^2}{(5-x)(4+x)}$. Ta có $g(x) = \dfrac{(3x-3)(-x+3)}{(5-x)(4+x)}$

$3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$; $4 + x = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		1		3		5		$+\infty$
$3x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$		
$-x+3$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$		
$5-x$	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$		
$4+x$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$		
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$		

Vậy $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1) \cup (3; 5)$.

3. Bài tập

1. Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x) = \dfrac{9-3x}{2x+4}$ b) $f(x) = -1 + \dfrac{x-7}{2x-2}$.

c) $f(x) = (2x-4)(4-x)^2(5-2x)$ d) $f(x) = \dfrac{2x(x-1)(x+2)}{(x-4)(7-x)}$.

2. Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-(2x-3)^2}{x^2-1}$ b) $f(x) = (x^2-4)(6-2x)(x-1)$

c) $f(x) = (2x+6)(4-2x)^2(10-x)$ d) $f(x) = \dfrac{(x^2-2x)(x+2)}{(x+4)(6-x)}$.

***Vấn đề 2:* Ứng dụng của dấu nhị thức để giải bất phương trình**

1. Phương pháp

* Biến đổi bất phương trình về một trong các dạng: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, trong đó $f(x)$ là tích hay thương của các nhị thức bậc nhất.

* Lập bảng xét dấu $f(x)$.

* Dựa vào bảng xét dấu để rút ra tập nghiệm của bất phương trình.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-3)^3 - 16x + 48 \geq 0$ (1)

b) $\dfrac{3x-6}{2-x} + 2 > \dfrac{x}{x-2}$ (2)

c) $\dfrac{x^3-4x^2+5x}{x^2-2x-8} \leq 0$ (3)

Giải

a) $(x+3)^3 - 25x - 75 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)^3 - 25(x+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+3)[(x+3)^2 - 25] \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+8)(x-2) \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-8		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-8; -3] \cup [2; +\infty)$.

b) $\dfrac{3x-6}{2-x} + 2 > \dfrac{x}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{3x-6+4-2x+x}{2-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{2-x} > 0$ (2)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Vế trái		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2)$.

c) $(3) \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2-4x+5)}{(x+2)(x-4)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+2)(x-4)} \leqslant 0$

(vì $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0, \forall x$)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup [0; 4)$.

Chú ý: Với bất phương trình *chứa dấu giá trị tuyệt đối* ta thường sử dụng hai cách sau:

Cách 1: Xét dấu biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối, áp dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để bỏ dấu giá trị tuyệt đối đưa về bất phương trình không có dấu giá trị tuyệt đối.

Cách 2: Áp dụng các tính chất: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ hay $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$

để giải, với $B > 0$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x + 4| \leqslant x + 8$ (1)

b) $|x - 3| > 3x + 15$ (2)

c) $\dfrac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 1$ (3)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \leqslant x+8 \\ 2x+4 \geqslant -x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 3x \geqslant -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$

b) (2) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-3 > 3x+15 \\ x-3 < -3x-15 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x < -18 \\ 4x < -12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -9 \\ x < -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x < -3.$

c) $\dfrac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 1$ (3)

* $x < 1$: $x - 1 < 0$ và $5 - x > 0$ nên:

$(3) \Leftrightarrow \dfrac{-x+1+3}{5-x+x} < 1 \Leftrightarrow -x + 4 < 5 \Leftrightarrow x > -1.$

So sánh điều kiện ta được $-1 < x < 1$ là nghiệm.

* $1 \leq x < 5$: $x - 1 \geq 0$ và $5 - x > 0$ nên:

$(3) \Leftrightarrow \dfrac{x-1+3}{5-x+x} < 1 \Leftrightarrow x + 2 < 5 \Leftrightarrow x < 3.$

So sánh điều kiện ta được $1 \leq x < 3$ là nghiệm.

* $x \geq 5$: $x - 1 > 0$ và $5 - x < 0$ nên:

$(3) \Leftrightarrow \dfrac{x-1+3}{-5+x+x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2x-5} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+7}{2x-5} < 0$

$\Leftrightarrow -x + 7 < 0$ (do $2x - 5 > 0$) $\Leftrightarrow x > 7.$

So sánh điều kiện ta được $x > 7$ là nghiệm.

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình (3) là $-1 < x < 3$ hoặc $x > 7$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận bất phương trình: $(x - 4)(4m - 12 - x) \leqslant 0$ (1)

Giải

Ta có: $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $4m - 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4m - 12$.

TH1: $4m - 12 < 4 \Leftrightarrow m < 4$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$4m-12$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$4m-12-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [4m - 12; 4]$.

TH2: $4m - 12 > 4 \Leftrightarrow m > 4$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		4		$4m-12$		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$4m-12-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [4; 4m - 12]$.

TH3: $4m - 12 = 4 \Leftrightarrow m = 4$:

(1) $\Leftrightarrow (x-4)(4-x) \le 0 \Leftrightarrow -(x-4) \le 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$. Vậy $S = \mathbb{R}$.

Kết luận: + $m < 4$: $S = [4m - 12; 4]$.

+ $m = 4$: $S = \mathbb{R}$.

+ $m > 4$: $S = [4; 4m - 12]$.

3. Bài tập

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{(3+x)(2-x)}{x+1} \ge 0$

b) $\dfrac{3}{1-x} > \dfrac{5}{2x+1}$

c) $\dfrac{(3-x)(x^2-4x+4)}{x^3-x} \le 0$

d) $\dfrac{2x-3}{3x+5} < \dfrac{3x+5}{2x-3}$

e) $\dfrac{3x+2}{(x+1)(x+2)} \ge 1$

f) $\dfrac{x^3-3}{x^2-1} \ge 3$

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $|4-3x| \le 8$

b) $|x-1| + |-2x+6| \ge x-5$

c) $|2x+4| + |x+1| < -3x - 1$

d) $\dfrac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)} \le \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{(2x-3)(|x-1|+2)}{|x-1|-2} \le 0$.

3. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $\dfrac{x-4m}{8-x} > 0$

b) $(2x-6)(x-m-1) \le 0$.

4. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x-2)(6-x) \ge 0 \\ \dfrac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-1} \le \dfrac{1}{3-x} \\ |x| < 1 \end{cases}$.

5. Giải và biện luận các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x-1)(4-x) > 0 \\ x-m+1 \le 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{1-x} > \dfrac{5}{4-2x} \\ x-m-1 \ge 0 \end{cases}$.

6. Định m để hàm số $y = \sqrt{(m-1)x - m + 2}$ xác định với mọi $x \in [0, 2]$.

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by + c > 0,\ ax + by + c < 0,\ ax + by + c \geqslant 0,\ ax + by + c \leqslant 0$$

trong đó a, b, c là những số cho trước sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$ và x, y là các ẩn số.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ gọi là **một nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

Tập hợp các điểm $M(x_0; y_0)$ trong đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

2. Cách xác định miền nghiệm:

Ta biểu diễn miền nghiệm trong mặt phẳng tọa độ dựa vào định lí sau:

Định lí: Trong mặt phẳng tọa độ, đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.

II. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Định nghĩa:

Một hệ bất phương trình mà mỗi bất phương trình của hệ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y gọi là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn số.

2. Miền nghiệm của hệ:

Tập hợp tất cả các điểm có tọa độ thỏa mãn *mọi bất phương trình* của hệ được gọi là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

1. Phương pháp:

Theo định lí trên:

Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ (1), ta làm như sau:

– Vẽ đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$.

– Chọn một điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc (d). Tính giá trị $P = ax_0 + by_0 + c$.

* Nếu $P > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **chứa điểm M** là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

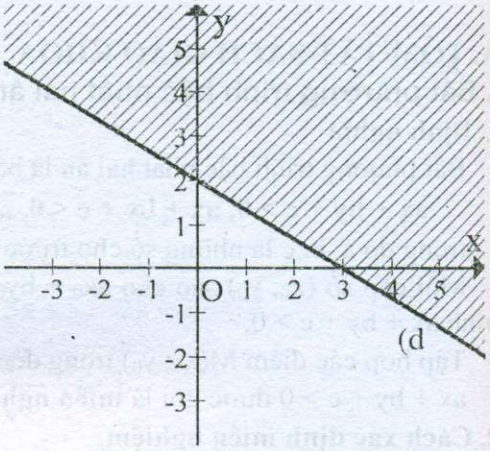
* Nếu $P < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **không chứa điểm M** là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Chú ý: Với các bất phương trình $ax + by + c \geqslant 0$ hay $ax + by + c \leqslant 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2. Ví dụ

Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x + 3y - 2 < 0$ (1).

Giải



* Vẽ đường thẳng

(d): $2x + 3y - 2 = 0$.

(d) là đường thẳng qua A(3; 0) và B(0; 2).

* Xét điểm O(0, 0) không thuộc (d).

Ta có $P = 2.0 + 3.0 - 2 < 0$.

Vậy nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **chứa điểm O** là miền nghiệm của bất phương trình (1).

(Miền nghiệm của (1) là phần không gạch không kể đường thẳng (d) sọc trong hình vẽ bên)

3. Bài tập

1. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình hai ẩn sau:

a) $x - 4y + 4 > 0$ b) $-2x + 3y + 6 \leqslant 0$.

2. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình hai ẩn sau:

a) $2x - y + 2 < 0$ b) $-2x + y \geq 0$.

***Vấn đề 2:* Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

1. Phương pháp

Để xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ta làm như sau:

– Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ và *gạch bỏ* miền còn lại.

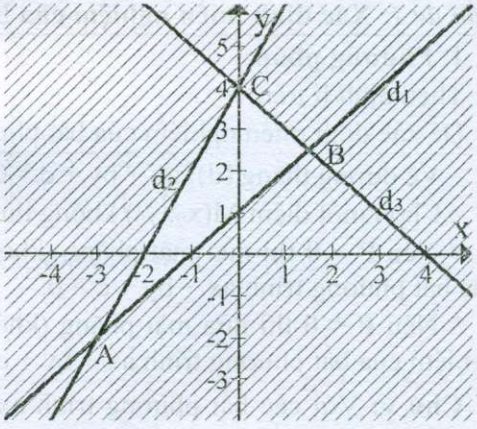
– Sau khi đã xác định hết tất cả các miền nghiệm của từng bất phương trình của hệ, thì miền **còn lại không bị gạch** chính là **miền nghiệm** của hệ.

2. Các ví dụ

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 & (1) \\ 2x - y + 4 > 0 & (2) \\ x + y - 4 < 0 & (3) \end{cases}$$

Giải



Vẽ các đường thẳng

(d_1): $x - y + 1 = 0$.

(d_2): $2x - y + 4 = 0$.

(d_3): $x + y - 4 = 0$.

Xét điểm O(0; 0) ta có:

* $0 - 0 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ O không thuộc miền nghiệm của (1).

* $2.0 - 0 + 4 > 0 \Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (2).

* $0 + 0 - 4 < 0 \Rightarrow O$ thuộc miền nghiệm của (3).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của ba bất phương trình (1), (2), (3) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong của tam giác ABC.

3. Bài tập

1. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình hai ẩn sau:

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 \\ y < 0 \\ x - 3y - 18 < 0 \end{cases}$.

2. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình hai ẩn sau:

a) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > -4 \\ 5x - y > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ 4x - 3y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Vấn đề 3: Áp dụng vào bài toán kinh tế

1. Phương pháp

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống – Ngành Quy hoạch tuyến tính. Dưới đây là một phương pháp giải bài toán

"Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức bậc nhất hai ẩn"

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức F = ax + by với (x; y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

Phương pháp giải:

* Xác định miền nghiệm S của hệ bất phương trình đã cho. Ta thường được S là một đa giác.

* Tính giá trị của F ứng với (x; y) là tọa độ các đỉnh của đa giác.

* Kết luận:

+ GTLN của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được

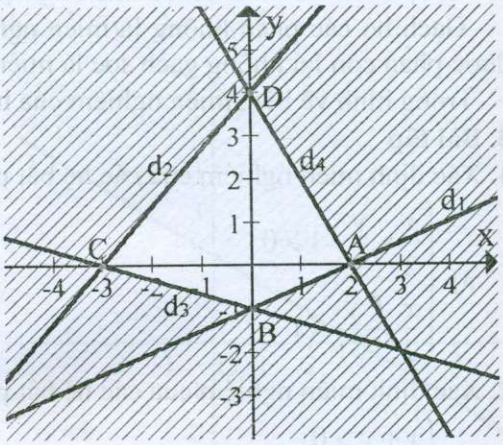
+ GTNN của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

2. Ví dụ

Tìm GTLN và GTNN của F = 4x + 5y – 6 với (x; y) là nghiệm của hệ bất phương trình

$$(I) \begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 & (1) \\ 4x - 3y + 12 \geq 0 & (2) \\ x + 3y + 3 \geq 0 & (3) \\ 2x + y - 4 \leq 0 & (4) \end{cases}$$

Giải



▸ Xác định miền nghiệm của hệ (I):

Vẽ các đường thẳng

(d_1): $x - 2y - 2 = 0$.

(d_2): $4x - 3y + 12 = 0$.

(d_3): $x + 3y + 3 = 0$.

(d_4): $2x + y - 4 = 0$.

Xét điểm O(0; 0) ta có:

* $0 - 2.0 - 2 < 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (1).

* $4.0 - 3.0 + 12 > 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (2).

* $0 + 3.0 + 3 > 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (3).

* $2.0 + 0 - 4 < 0 \Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (4).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của bốn bất phương trình (1), (2), (3) và (4) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là tứ giác ABCD trong đó

A(2; 0), B(0; –1), C(–3; 0) và D(0; 4).

▸ Miền nghiệm của (I) là tứ giác ABCD.

* Tại A(2; 0) ta có $F = 4.2 + 5.0 - 6 = 2$.

Tại B(0; –1) ta có $F = 4.0 + 5(-1) - 6 = -11$.

Tại C(–3; 0) ta có $F = 4.(-3) + 5.0 - 6 = -18$.

Tại D(0; 4) ta có $F = 4.0 + 5.4 - 6 = 14$.

Vậy với (x; y) là nghiệm của (I) thì:

GTLN của F là 14 đạt được khi $x = 0, y = 4$.

GTNN của F là – 18 đạt được khi $x = -3, y = 0$.

3. Bài tập

1. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ thỏa hệ:

$$\begin{cases} 2x - y \leqslant 2 \\ x - 2y \geqslant -2 \\ x + y \geqslant -2 \end{cases}.$$

a) Hãy xác định (S) để thấy (S) là một tam giác.

b) Trong (S) hãy tìm điểm (x; y) làm cho biểu thức $F = f(x, y) = 2x + 3y$ có GTNN.

2. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	7	1	1
B	15	1	3
C	8	0	2

Một đơn vị sản phẩm I lãi 10 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 15 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

§7. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Tam thức bậc hai

Định nghĩa:

* Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước và $a \neq 0$.

* Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

* Các biểu thức $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$ và $\Delta' = \mathbf{b'^2 - ac}$ với $b = 2b'$ theo thứ tự gọi là *biệt thức và biệt thức thu gọn* của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

II. Định lí về dấu của một tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

* Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) **cùng dấu** với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

* Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) **cùng dấu** với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

* Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Khi đó: f(x) **trái dấu** với hệ số a với mọi x **nằm trong** khoảng $(x_1; x_2)$ (tức là $x_1 < x < x_2$), và f(x) **cùng dấu** với hệ số a với mọi x **nằm ngoài** đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hay $x > x_2$).

(TRONG TRÁI, NGOÀI CÙNG)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Xét dấu biểu thức f(x)**

1. Phương pháp

Để xét dấu biểu thức f(x) ta thực hiện như sau:

a. Nếu f(x) là một tam thức bậc hai thì ta thực hiện các bước sau:

– Tính Δ

– Tìm nghiệm (nếu có) của tam thức.

– Dựa vào **dấu Δ và dấu của a**, áp dụng định lí dấu tam thức để kết luận dấu của tam thức.

b. Nếu f(x) là một biểu thức không là tam thức bậc hai thì ta thực hiện các bước:

– Biến đổi f(x) thành tích hay thương của các biểu thức bậc nhất hay bậc hai.

– Xét dấu từng biểu thức

– Suy ra dấu của f(x).

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ b) $g(x) = -2x^2 - 5x - 2$.

c) $h(x) = 9x^2 - 12x + 4$ d) $k(x) = -3x^2 + 2x - 5$.

Giải

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

Ta có: $\Delta = 9 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 4)$.

b) $g(x) = -2x^2 - 5x - 2$.

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4.(-2).(-2) = 9 \Rightarrow g(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
g(x)		–	0	+	0	–	

Vậy $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -\frac{1}{2})$.

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

c) $h(x) = 9x^2 - 12x + 4$

Ta có: $\Delta = 0 \Rightarrow h(x)$ có nghiệm kép là $x = \frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
h(x)		+	0	+	

Vậy $h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

d) $k(x) = -3x^2 + 2x - 5$.

$\Delta = -14 < 0$ mà $a = -3 < 0 \Rightarrow k(x)$ luôn cùng dấu với $a \Rightarrow k(x) < 0, \forall x$.

Vậy $k(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Chứng minh phương trình:

$(2m^2 + 7m + 10)x^2 - 2(m + 3)x + 1 = 0$ (1)

luôn *vô nghiệm* với mọi m.

Giải

Ta có: $a = 2m^2 + 7m + 10$ có $\Delta_a = 49 - 80 < 0$ nên $a > 0$ với mọi m.

(1) có $\Delta' = (m + 3)^2 - (2m^2 + 7m + 10) = -m^2 - m - 1 = g(m)$.

Vì $g(m)$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a_g = -1 < 0$ nên $g(m) < 0 \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy (1) có $a \neq 0$ và $\Delta' < 0$ nên (1) vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

3. Bài tập

1. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = -x^2 - 5x - 6$

c) $h(x) = -9x^2 + 6x - 1$

d) $k(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$.

2. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 - \sqrt{2}$

b) $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$

c) $x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x - 1$

3. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = \dfrac{(x-7)(x^2+x-2)}{2x^2-x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2+6x+9)(1-x^2)}{8-2x-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{\sqrt{6}x^2-3x+\sqrt{2}}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2+4x-10}{(x^2-4)(12-x-x^2)}$

Vấn đề 2: Điều kiện để tam thức f(x) không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

1. Phương pháp

Áp dụng hệ quả định lí dấu tam thức bậc hai sau:

Hệ quả: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có:

$$* \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$$* \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}.$$

$$* \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$* \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$.

Chú ý: Khi hệ số a có chứa tham số thì cần xét hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (m + 4)x^2 - (3m + 1)x + 3m + 1$

luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

TH1: $a = m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$:

Khi đó $f(x) = 11x - 11 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow m = -4$ (loại)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ (3m+1)(-m-15) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < -15 \vee m > -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$

luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 4$:

Khi đó: $f(x) = 5x + 7 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{7}{5} \Rightarrow m = 4$ (loại).

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m+1)^2 - 4(m-4)(2m-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ -7m^2 + 38m - 15 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < \dfrac{3}{7} \vee m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{7}.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m < \dfrac{3}{7}$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (m - 1)x^2 - (m - 1)x + 2m + 1$

không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$:

Khi đó: $f(x) = 3 \geq 0, \forall x \Rightarrow m = 1$ (nhận)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 4(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -7m^2 + 2m + 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -\dfrac{5}{7} \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m \geq 1$.

3. Bài tập

1. Định giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (m^2 + 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1$.

b) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2$.

b) $f(x) = (m - 4)x^2 - (m - 1)x + 5 - 2m$.

3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 6$.

b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 6$.

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (m^2 + 3)x^2 + 2(m + 3)x + 1$.

b) $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x - 2m + 8$.

c) $f(x) = x^2 + (m - 2)x + 4m + 1$.

5. Định m để hàm số

a) $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + m + 2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{3x + m}{\sqrt{x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 5m - 10}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

1. Bất phương trình bậc hai (một ẩn) là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geqslant 0,\ f(x) \leqslant 0$

trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Hệ bất phương trình bậc hai là một hệ gồm các bất phương trình bậc hai.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta thường gặp các dạng bài toán về bất phương trình bậc hai sau:

***Vấn đề 1:* Giải bất phương trình bậc hai**

1. Phương pháp

Để giải một bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

2. Ví dụ

Giải các bất phương trình

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$ (1)

b) $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ (2)

c) $x^2 - 2x + 10 > 0$ (3)

d) $-2x^2 + x - 3 \geq 0$ (4)

Giải

a) Ta có: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hay $x = 2$.

Do $a > 0$ và bất phương trình nhận dấu dương (cùng dấu với a) nên nghiệm của (1) là những giá trị x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Vậy (1) $\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$. Do đó tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Ta có: $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ hay $x = -2$.

Do $a = -1 < 0$ và bất phương trình nhận dấu dương (trái dấu với a) nên nghiệm của bất phương trình là các giá trị x ở giữa hai nghiệm.

Vậy (2) $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$. Vậy tập nghiệm là S [–2; 4].

c)Ta có $x^2 - 2x + 10 = 0$ vô nghiệm và $a > 0$ nên $x^2 - 2x + 10 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy (3) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

d)Ta có $-2x^2 + x - 3 = 0$ vô nghiệm và $a = -2 < 0$ nên $-2x^2 + x - 3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy (4) vô nghiệm. Tập nghiệm là $S = \varnothing$.

3. Bài tập

Giải các bất phương trình:

1. $5x^2 - 4x - 12 > 0$
2. $-16x^2 + 40x - 25 > 0$
3. $3x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$
4. $x^2 - x - 6 \geqslant 0$

Vấn đề 2: Giải bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

Để giải một bất phương trình dạng

$$f(x).g(x) > 0\ (< 0; \geqslant 0; \leqslant 0) \text{ (hay } \frac{f(x)}{g(x)} > 0; < 0; \geqslant 0; \leqslant 0)$$

với f(x), g(x) là một tam thức bậc hai hoặc một nhị thức bậc nhất ta tìm nghiệm của f(x) và g(x), lập bảng xét dấu.

Dựa vào bảng xét dấu ta kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

Chú ý: Với hai số $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, **ta có:**

*** nếu a > 0 thì** $x_1 < x_2$.

*** nếu a < 0 thì** $x_1 > x_2$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\frac{2x^2-3x-2}{x^2+5x+6} \geqslant 0$.

Giải

Đặt $f(x) = \frac{-x^2+2x+24}{x^2+5x+6}$.

$-x^2 + 2x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ hoặc $x = -4$.

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = -3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-3		-2		6		$-\infty$
$-x^2 + 2x + 24$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^2 + 5x + 6$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
f(x)		$-$	|	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -3) \cup (-2; 6]$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $(2x^2 - 4x - 6)(6 - x - x^2) < 0$.

Giải

Đặt $f(x) = (2x^2 - 4x - 6)(6 - x - x^2)$

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$.

$6 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hay $x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		$+\infty$
$2x^2 - 4x - 6$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$6 - x - x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

3. Bài tập

Giải các bất phương trình:

1. $(6-2x)(x^2+x-30)(x^2-4x+4) \leqslant 0$

2. $\dfrac{2x^2-7x-7}{x^2-3x-10} \leqslant 1$

3. $x^2+(x+1)^2 \leqslant \dfrac{15}{x^2+x+1}$.

4. $3x^4-x^3+4x^2-x+3 \geqslant 0$.

Vấn đề 3: Giải hệ bất phương trình bậc hai

1. Phương pháp

Để giải hệ bất phương trình bậc hai ta làm như sau:

* Giải từng bất phương trình của hệ.

* Giao các tập nghiệm của tất cả các bất phương trình chính là tập nghiệm của hệ.

2. Ví dụ

Giải hệ bất phương trình (I) $\begin{cases} x^2+3x-18>0 & (1a) \\ -x^2+2x+15 \geqslant 0 & (1b) \end{cases}$ (I).

Giải

Bất phương trình (1a) có tập nghiệm là $S_1=(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$.

Bất phương trình (1b) có tập nghiệm là $S_2=[-3;5]$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là

$S=S_1\cap S_2=(3;5]$.

Trong thực hành ta thường giải hệ trên bằng cách biến đổi tương đương như sau:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x<-6 \vee x>3 \\ -3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x\leq 5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (I) là $S=(3;5]$.

3. Bài tập

1. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2-9x+7>0 \\ (x^2-x-6)(x^2-3x+3)<0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2+5x-6 \leqslant 0 \\ (4x^2+12x+5)(1-x^2)>0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+x-2 \geqslant 0 \\ 2x^2+11x+9<0 \\ x^3+x^2+2x+2>0 \end{cases}$

d) $-3 \leqslant \dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}<3$.

2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-1}$.

b) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}}$.

Vấn đề 4: Giải và biện luận bất phương trình bậc hai

1. Phương pháp

Để giải và biện luận bất phương trình bậc hai ta căn cứ vào *dấu của Δ và dấu của a* để suy ra dấu của tam thức. Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình $f(x) = mx^2 + 4mx + m + 6 > 0$ (1).

Giải

Ta có: $a = m$

* $m = 0$: $f(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

* $m \neq 0$:

Ta có: $\Delta' = 3m^2 - 6m$

Bảng xét dấu a và Δ':

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
a		$-$	0	$+$	|	$+$	
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi $x_1 = \dfrac{-2m - \sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2 = \dfrac{-2m + \sqrt{\Delta'}}{m}$ là hai nghiệm nếu có của f(x).

Biện luận:

- $m < 0$: $a < 0$ và $\Delta' > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là x_2; x_1 ($x_2 < x_1$).
  Do đó (1) $\Leftrightarrow x_2 < x < x_1$. Vậy $S = (x_2; x_1)$.
- $0 < m < 2$: $a > 0$ và $\Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
  Do đó (1) $\Leftrightarrow \forall x \in R$. Vậy $S = \mathbb{R}$.
- $m = 2$: $a > 0$ và $\Delta' = 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$.
  Do đó (1) $\Leftrightarrow \forall x \neq -2$. Vậy $S = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
- $m > 2$: $a > 0$ và $\Delta' > 0 \Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm x_1; x_2 ($x_1 < x_2$).
  Do đó (1) $\Leftrightarrow x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Vậy $S = (-\infty; -x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Kết luận: * $m < 0$: $S = (x_2; x_1)$.
* $0 < m < 2$: $S = \mathbb{R}$.
* $m = 2$: $S = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
* $m > 2$: $S = (-\infty; -x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m làm cho bất phương trình sau vô nghiệm:

$f(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m - 2 > 0$ (*)

Giải

Ta có: (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $a = m = 0$: $f(x) = 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Rightarrow m = 0$ (loại).

TH2: $a = m \neq 0$: $f(x) \leq 0 \ \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m+1)^2 - m(m-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{4}.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{4}$.

3. Bài tập

1. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $x^2 - 2(2m - 3)x + 3m^2 - 4m + 9 < 0$.

b) $x^2 - (m + 3)x + m^2 + 3m > 0$

c) $(m - 1)x^2 + 2(m - 3)x + m - 5 \geq 0$.

d) $(m + 1)x^2 + 2mx + m + 3x + 5 \leq 0$

2. Định m để:

a) bất phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 6 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) bất phương trình $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geqslant 0$ vô nghiệm.

c) bất phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 < 0$ có nghiệm.

d) bất phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geqslant 0$ có nghiệm.

3. Tìm m sao cho với mọi x ta có: $-1 \leqslant \dfrac{x^2 - 5x + m}{2x^2 + 3x + 2} < 7$.

4. Tìm m để

a) bất phương trình $\left|\dfrac{3x^2 + 2x + 12}{x^2 - mx + 4}\right| \geqslant 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

b) hàm số $y = \dfrac{3}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 8 + 9m}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

5. Chứng minh rằng $3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5 \geqslant 0$ với mọi x, mọi y.

§9. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Phương trình – bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Định nghĩa

Phương trình – bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối là phương trình – bất phương trình có chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối.

2. Tính chất

a) $|A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geqslant 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$. $\qquad |A|^2 = A^2$.

b) $|A| \geq 0, \forall A$. $\qquad |A| \geq A, \forall A$.

$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0$. $\qquad |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B \ (B > 0)$.

$|A| > B \Leftrightarrow A < -B$ hoặc $A > B$.

c) Với hai số A, B tùy ý, ta có:

+ $|A + B| \leqslant |A| + |B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geqslant 0$.

+ $\big||A| - |B|\big| \leqslant |A - B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geqslant 0$.

II. Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1. Định nghĩa

Phương trình – bất phương trình chứa căn là phương trình – bất phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn.

2. Các công thức cơ bản

$$* \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \ (hay\ B \geqslant 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$* \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{A} \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \\ A \leqslant B^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{A} \geqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A \geqslant B^2 \end{cases}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. phương pháp

Việc giải các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối ta đều theo nguyên tắc chung là *khử dấu giá trị tuyệt đối* để đưa về phương trình thông thường.

Ta cần chú ý đến các dạng toán sau:

Dạng 1: Các dạng cơ bản

a) $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

b) $|A| = B \overset{Cách\ 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A = B \ hay\ A = -B \end{cases}$ (dùng khi B ít phức tạp hơn A)

c) $|A| = B \overset{Cách\ 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A \geqslant 0 \\ A = B \end{cases} hay \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$ (dùng khi A ít phức tạp hơn B)

Dạng 2: Phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối.

Để giải những phương trình loại này ta thường thực hiện như sau:

Bước 1: Xét dấu các biểu thức ở dưới dấu giá trị tuyệt đối.

Bước 2: Dựa vào bảng xét dấu phân chia các trường hợp để khử dấu trị tuyệt đối ta được phương trình thông thường.

Bước 3: Giải phương trình thu được trên từng khoảng xét dấu đó và chọn nghiệm thích hợp.

Bước 4: Kết luận: Nghiệm của phương trình ban đầu là hợp của các nghiệm tìm được trong mỗi trường hợp.

Dạng 3: Giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối bằng cách đặt ẩn phụ

– Dùng ẩn phụ với điều kiện thích hợp đưa phương trình về phương trình không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

– Giải phương trình theo ẩn phụ.

– Thay giá trị ẩn phụ tìm được vào cách đặt ta tìm được nghiệm phương trình ban đầu.

Dạng 4: Dùng các điều kiện xảy ra đẳng thức trong các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt để giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ta có các bất đẳng thức thường gặp sau:

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a) $|A+B| \leqslant |A|+|B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A.B $\geqslant 0$.

b) $\big||A|-|B|\big| \leqslant |A-B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A.B $\geqslant 0$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình $|2x^3-6x-4|=|x^3-x^2-4|$ (1)

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3-6x-4=x^3-x^2-4 \\ 2x^3-6x-4=-x^3+x^2+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+x^2-6x=0 \\ 3x^3-x^2-6x-8=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x-6=0 \\ (x-2)(3x^2+5x+4)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \vee x=2 \\ x-2 \\ 3x^2+5x+4=0 \ \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = {–3; 0; 2}.

Ví dụ 2: Giải phương trình $|x^2 + 3x| = -4x - 6$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x-6 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x=-4x-6 \\ x^2+3x=4x+6 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x-6 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+7x+6=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x-6 \geqslant 0 \\ x=-1 \vee x=-6 \\ x=3 \vee x=-2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ x = –1 hoặc x = 3. Vậy tập nghiệm của (2) là S = {–1; 3}.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $|x - 1| = x^3 - x^2 - x + 1$ (3)

Giải

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 = x^3 - x^2 - x + 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x-1 < 0 \\ 1-x = x^3 - x^2 - x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x < 1 \\ x^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x = 1 \vee x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ hay } x = 0$$

$\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = $\sqrt{2}$ hoặc x = 0.

Vậy tập nghiệm của (3) là S = {0; 1; $\sqrt{2}$ }.

Ví dụ 4: Giải phương trình $|x + 1| + |2x + 4| - |x + 4| = 2$ (4)

Giải

Ta có: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$;

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;

$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		$-\infty$
x + 1		$-$	|	$-$	|	$-$	0	+	
2x + 4		$-$	|	$-$	0	+	|	+	
x + 4		$-$	0	+	|	+	|	+	

* $x < -4$: (4) $\Leftrightarrow -x - 1 - 2x - 4 + x + 4 = 3 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$ (loại)

* $-4 \leq x < -2$: (4) $\Leftrightarrow -x - 1 - 2x - 4 - x - 4 = 3 \Leftrightarrow -4x = 12 \Leftrightarrow x = -3$ (nhận)

* $-2 \leq x < -1$: (4) $\Leftrightarrow -x - 1 + 2x + 4 - x - 4 = 3 \Leftrightarrow 0x = 4 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $x \geq -1$: (4) $\Leftrightarrow x + 1 + 2x + 4 - x - 4 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

Kết luận: Nghiệm của phương trình là: x = –3 hoặc x = 1.

Ví dụ 5: Giải phương trình $\left|\frac{3x}{2x-6}\right| - \left|\frac{2x-6}{x}\right| = 2$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 3$.

Đặt $t = \left|\frac{x}{2x-6}\right| > 0$. Ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 3t - \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (nhận) hoặc } t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{2x-6}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2x - 6 \\ x = -2x + 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 6 \\ x = 2 \end{bmatrix}.$$

So sánh điều kiện ta được nghiệm của (1) là x = 6; x = 2.

Ví dụ 6: Giải phương trình $|x^2-4x|+|x-6|=|x^2-3x-6|$ (1)

Giải

Ta có: Vế trái (1) $\geq |(x^2-4x)+(x-6)| = |x^2-3x-6|$ = Vế phải (1).

Do đó (1) $\Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x^2-4x)(x-6)\geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		4		6		$-\infty$
x^2-4x		+	0	−	0	+	|	+	
$x-6$		−	|	−	|	−	0	+	
$(x^2-4x)(x-6)$		−	0	+	0	−	0	+	

Vậy tập nghiệm của (1) là $S=[0;4]\cup[6;+\infty)$.

3. Bài tập

1. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2+5x+4|=x^2-5x-6$.

b) $|x+2|=2x+10$.

c) $\left|\dfrac{x^2-2}{x-1}\right|=2$.

d) $|x^2-2x+3|=|x+1|$.

e) $|x^2+x-3|=x^2+3x+5$.

f) $|x^2-4x-5|+4x=24$.

g) $x^2-5|x-1|-1=0$.

h) $|x^2-3|x|+2|=x^2-2x$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{|x^2-1|+|x-2|}{x+|x-1|}=1$.

b) $\dfrac{|8-4x|-|x|}{|2+2x|+x-2}=1$.

c) $\dfrac{|x^2-1|+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$.

d) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}+\dfrac{|2x-4|}{|x-1|}-3=0$.

e) $|x^2-5|x|+4|=|2x^2-3|x|+1|$.

f) $\dfrac{|x^2-1|}{|x-2|}=x+|x-2|-2$.

g) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

h) $|2x^2-|x-1||=3x+1$.

3. Biện luận số nghiệm của phương trình sau:

a) $|x-2|-2|x+1|-m=0$.

b) $(x-1)|x|+m=0$.

c) $x^2+2x+2|x+1|+m=0$.

4. Định m để phương trình:

a) $|x^2-4x|=2x+2+m$ có 4 nghiệm phân biệt.

b) $|2x-2|-|x+3|+2x+m=0$ có nghiệm duy nhất.

Vấn đề 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. phương pháp

Cũng tương tự như giải phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối ta cũng theo cách chung là khử dấu giá trị tuyệt đối đưa về các bất phương trình không còn dấu giá trị tuyệt đối. Ta chú ý các dạng toán thường gặp sau:

a) Dạng cơ bản:

* $|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0$

* $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B.$

* $|A| > B \Leftrightarrow A < -B$ hoặc $A > B.$

b) Các dạng khác:

Ta cũng dùng các cách giải tương tự như đối với phương trình chứa giá trị tuyệt đối.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|x^2 - 25| \leqslant 15 - 3x$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 25 < 15 - 3x \\ x^2 - 25 > 3x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 40 < 0 \\ x^2 - 3x - 10 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 < x < 5 \\ x < -2 \vee x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < x < -2.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-8; -2)$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $|x^2 - 6x + 8| + x^2 - 4x \geqslant 0$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow |x^2 - 6x + 8| \geqslant -x^2 + 4x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 6x + 8 \geqslant -x^2 + 4x \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant x^2 - 4x \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^2 - 10x + 8 \geqslant 0 \\ -2x + 8 \leqslant 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \leqslant 1 \vee x \geqslant 4 \\ x \geqslant 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 4.$$

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $|2x + 4| + 2|2x + 8| - 4 \leqslant x^2 + 4x$ (3)

Giải

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$2x + 4$	$-$	|	$-$	0	$+$		
$2x + 8$	$-$	0	$+$	|	$+$		

Ta có:

* $x < -4$: $(3) \Leftrightarrow -2x - 4 - 2(2x + 8) - 4 \leqslant x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 24 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -6 \vee x \geqslant -4$

So sánh điều kiện ta được $x \leqslant -6$.

* $-4 \leq x < -2$:

(3) $\Leftrightarrow -2x - 4 + 2(2x + 8) - 4 \leq x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 2$

So sánh điều kiện ta được $x = -4$.

* $x \geq -2$:

(3) $\Leftrightarrow 2x + 4 + 2(2x + 8) - 4 \leq x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{17}$ hoặc $x \geq \sqrt{1+\sqrt{17}}$

So sánh điều kiện ta được $x \geq \sqrt{1+\sqrt{17}}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là

$S = (-\infty, -6] \cup \{-4\} \cup [\sqrt{1+\sqrt{17}}\,; +\infty)$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $2 + \left|\dfrac{x^2-3}{x}\right| \leq \dfrac{x^4-6x^2+9}{x^2}$ (4)

Giải

Đặt $t = \left|\dfrac{x^2-3}{x}\right| \geq 0$. Ta được:

(4) $\Leftrightarrow 2 + t \leq t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -1$ (loại) hay $t \geq 2$ (nhận)

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x^2-3}{x}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^4-6x^2+9}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 < x^2 \leq 1 \\ x^2 \geq 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ -1 \leq x < 0 \\ 0 < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty, -3] \cup [-1, 0) \cup (0, 1] \cup [3, +\infty)$.

3. Bài tập

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left|-x^2 - x - 1\right| \leq 2x + 7$ b) $\left|x^2 - x\right| \leq \left|x^2 - 1\right|$

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left|\dfrac{x^2-4}{x^2+x+2}\right| \leq 1$ b) $\left|\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| \geq 1$

3. Tìm tập xác định của hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\left|x^2+3x-4\right| - x + 8}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{\left|2x-1\right| - x + 2}}$

Vấn đề 3: Giải phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1. Phương pháp

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta thực hiện theo nguyên tắc chung là khử dấu căn đưa về phương trình thông thường.

Ta chú ý các dạng thường gặp sau:

a) Dạng cơ bản:

$$\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\geqslant 0\ (hay\ B\geqslant 0)\\ A=B\end{cases}$$

$$\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geqslant 0\\ A=B^2\end{cases}$$

b) Các dạng khác:

Với các phương trình không ở dạng cơ bản, tùy theo mỗi phương trình, ta thường sử dụng các cách sau đây để giải:

Cách 1: ***Bình phương hai vế***:

Bình phương hai vế của phương trình để khử dấu căn, đưa phương trình đã cho về phương trình mới đơn giản hơn. Cần chú ý đặt các điều kiện cần thiết để các phép biến đổi là tương đương.

Cách 2: ***Đặt ẩn phụ***:

Đặt ẩn phụ là các căn thức ta có thể biến đổi phương trình đã cho thành phương trình không chứa căn. Việc chọn ẩn phụ rất đa dạng, cần linh hoạt để có cách giải tốt nhất.

Khi đặt ẩn phụ cần chú ý các điều kiện sau:

+ Nếu đặt $t=\varphi(x)$, $x\in D$ thì điều kiện để tính được x theo t là $t\in\varphi(D)$.

+ Nếu $x\in[a;b]$ và đặt $x=\varphi(t)$ thì phải chọn $t\in[\alpha;\beta]$ sao cho khi t biến thiên từ α đến β thì x biến thiên từ a đến b.

+ Có thể đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình ẩn t và x.

+ Có thể đặt hai ẩn phụ u, v để đưa về hệ hai ẩn u, v.

Cách 3: ***Biến đổi về phương trình tích***:

Nếu có nhân tử chung ta có thể đưa phương trình vế phương trình tích $A.B=0$ trong đó các phương trình $A=0$, $B=0$ đơn giản hơn.

Chú ý các lượng liên hợp giúp làm xuất hiện các nhân tử chung.

Cách 4: ***Sử dụng các điều kiện xảy ra dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức quen thuộc***:

Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá hai vế của phương trình và sử dụng điều kiện xảy ra dấu "=" ta có thể giải được một số phương trình chứa căn.

Cách 5: ***Dự đoán và chứng minh phương trình có duy nhất nghiệm.***

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x}=\sqrt{x^2-4}$ (1)

Giải

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\ 2x^2+5x=x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant -2\vee x\geqslant 2\\ x^2+5x+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x = -1 \vee x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Vậy nghiệm của (1) là x = –4.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{4+6x-x^2} = 4 - x.$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 4 + 6x - x^2 = (4-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 2x^2 - 14x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = 1 \vee x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy (1) có nghiệm là x = 1.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{(3+x)(6-x)} + 3$ (3)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = (3+x)(6-x) + 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

$\Leftrightarrow (3 + x)(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 6$ (thỏa điều kiện)

Vậy (3) có nghiệm là x = –3 hoặc x = 6.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$ (4)

Giải

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$; $v = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ $(u, v \geq 0)$.

Ta được: $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 - v^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u - v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm là x = 1 hoặc x = 2.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^3 + (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2} = 1 - x\sqrt{1 - x^2}$ (5)

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

Khi đó:

$$(5) \Leftrightarrow x^3 - 1 + \sqrt{1-x^2}\,(x^2 + 1 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1 + \sqrt{1-x^2}\,) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{1-x^2}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 1-x^2=1-2x+x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy phương trình (5) có nghiệm là x = 0 hoặc x = 1.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=x^2-8x+18$ (6)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\leq x\leq 5.$

Khi đó ta có:

Vế trái (6) = $1.\sqrt{x-3}+1\sqrt{5-x}\leq \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(x-3)+(5-x)}=2.$

Vế phải (6) = $(x-4)^2+2\geq 2.$

Do đó:

$$(6)\Leftrightarrow \text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-3}}{1}=\dfrac{\sqrt{5-x}}{1} \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy phương trình (6) có nghiệm là x = 4.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x^2+x+2}$ (7)

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+2x-3\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -3 \vee x\geq 1 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -3 \\ 1\leq x\leq 5 \end{cases}.$$

Ta có: Vế trái (7) $\geq \sqrt{(x^2+2x-3)+(5-x)}=\sqrt{x^2+x+2}$ = Vế phải (7).

Do đó:

$$(7)\Leftrightarrow \text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x^2+2x-3)(5-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \\ x=5 \end{cases}.$$

Vậy (7) có ba nghiệm là x = –3, x = 1, x = 5.

Ví dụ 8: Giải phương trình $\sqrt{x+5}+2\sqrt{2x+1}=9$ (8)

Giải

Điều kiện: $x\geq -\dfrac{1}{2}$.

Cách 1:

$$(8)\Leftrightarrow \sqrt{x+5}-3+2(\sqrt{2x+1}-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5-9}{\sqrt{x+5}+3}+2\frac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}+\frac{4}{\sqrt{2x+1}+3}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x = 4$ (vì biểu thức trong dấu ngoặc luôn dương)

Vậy (8) có nghiệm là $x = 4$.

Cách 2:

Ta có: * $x = 4$ là một nghiệm của phương trình (8).

* $x > 4$ thì $\sqrt{x+5} > 3, 2\sqrt{2x+1} > 6 \Rightarrow$ Vế trái (8) > 9 (vô lí)

* $-\frac{1}{2} \leqslant x < 4$ thì $\sqrt{x+5} < 3, 2\sqrt{2x+1} < 6 \Rightarrow$ Vế trái (8) < 9 (vô lí)

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của (8).

3. Bài tập

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-4x} = \sqrt{7+\sqrt{2-x}}$

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x} = \sqrt{3x+2}$

c) $\sqrt{2x^2+4x-2} = x+1$

d) $\sqrt{4x^2+101x+64} = 2(x+10)$

e) $\sqrt{x^2+12x} = -2x^2-4x+136$

f) $\sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2+3x-4.$

2. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x.$

b) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

c) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x^2\sqrt{2}.$

d) $(x-2)(x+1) + (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 6.$

e) $x^2 + 10x + 24 = (2x+8)\sqrt{x^2+9}$

f) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9.$

g) $15x^2 + 8x\sqrt{16+x} = 63(16+x)$

h) $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}.$

i) $2\sqrt{2x-1} = x^2+1.$

j) $x\sqrt{1-x} + 2(1-x) = x^2.$

k) $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x.$

Vấn đề 4: Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1. Phương pháp

Tương tự với phương trình chứa căn, giải bất phương trình ta cũng theo nguyên tắc chung là khử dấu căn đưa về các bất phương trình thông thường.

a) Dạng cơ bản:

- $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$
- $\sqrt{A} \geq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B \end{cases}$
- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$

b) Các dạng khác:

Cách giải tương tự như đối với phương trình chứa căn thức.

Cần chú ý: • **Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.**

• **Với mọi $a, b \in R$ thì $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.**

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq x - 3$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 \leq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 5 \\ x \geq 3 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 8.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là S = [5; 8].

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 7x} > x - 4$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 < 0 \\ x^2 - 7x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 7x > (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \leq 0 \vee x \geq 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 16 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $4 \leq x < 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0] \cup [4; 16)$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $x + \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} > \dfrac{35}{4}$ (3)

Giải

Điều kiện: $x < -3$ hoặc $x > 3$.

- $x < -3$: Vế trái (3) < 0, Vế phải (3) > 0 $\Rightarrow x < -3$ không là nghiệm của (3).
- $x > 3$:

$$(3) \Leftrightarrow x^2 + \frac{9x^2}{x^2 - 9} + 6.\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} > \left(\frac{35}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 - 9} + 6.\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} > \frac{1225}{16}.$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} > 0$, ta được:

$(3) \Leftrightarrow t^2 + 6t - \dfrac{1225}{16} > 0 \Leftrightarrow t < -\dfrac{49}{4} \vee t > \dfrac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} > \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow 4x^2 > 25\sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow 16x^4 - 625x^2 + 5625 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 < \dfrac{225}{16} \vee x^2 > 25 \Leftrightarrow x < \dfrac{15}{4} \vee x > 5.$

So sánh điều kiện ta được $3 < x < \dfrac{15}{4} \vee x > 5.$

3. Bài tập

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-2x-8} < x-2$ b) $\sqrt{x-1} \leqslant x-3.$

c) $\sqrt{2x^2-1} > 1-x$ d) $\sqrt{x^2-5x-14} \geqslant x-1.$

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{1-x^2} > \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ b) $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leqslant x^2-9$

c) $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$ e) $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} < 3$

d) $\sqrt{5x^2+10x+1} \geqslant 7 - x^2 - 2x$ f) $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} + 5.$

3. Tìm tập xác định của hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x-1-\left|x^2+3x-4\right|}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{\left|x-1\right|-x-3}{x^2+3x+3}}$

c) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+7x+12} - \dfrac{1}{x^2-2x+6}}$ d) $y = \sqrt{\sqrt{x^2+5x-14}+x+3}$

4. Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1} \geqslant 3\sqrt{x}.$

§10. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

1. Giải bất phương trình:

a) $\dfrac{x-2}{x^2+8x+15} \geq 0$ b) $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \leqslant 1.$

2. Giải các phương trình, bất phương trình:

a) $\left|x^2+3x-4\right|=3-3x$ b) $\sqrt{x^2-2x+3}=x+\sqrt{2}-1$

c) $\sqrt{x^2+4x-12}\geq -x-4$ d) $(x-2)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-4$

e) $\sqrt{x^2+8x}\leq 2(x+1)$ f) $\sqrt{x(x+3)}\leq 6-x^2-3x$

3. Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$ b) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

4. **(Đề thi Đại học khối D – 2010)**

Tìm GTNN của $y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$.

5. Cho hai số thực dương thay đổi x, y thỏa mãn điều kiện: $3x+y\leq 1$.

Tìm GTNN của $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn dương với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\frac{1}{m}x^2+2(m-2)x+m^2$ b) $f(x)=(m-2)x^2+2(m-2)x+m+4$.

7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn âm với mọi $x\in R$:

a) $f(x)=(m-2)x^2+2x-4$ b) $f(x)=m(m+8)x^2-2(m+8)x+8m+1$

8. Giải và biện luận bất phương trình sau:

a) $2x^2-(m+9)x+m^2-3m+4\geq 0$.

b) $(m+1)x^2-2mx+2m\leq 0$.

9. Định m để:

a) Bất phương trình $\left|\frac{x^2+mx+1}{x^2+1}\right|\leq 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\sqrt{m(m+2)x^2+2mx+2}$ xác định với mọi x.

10. Giải hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases}\frac{x^2-6x-4}{x-1}>2\\(x-2)(x^2+6x-7)\leq 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\left|2x-3\right|\leq x+5\\\sqrt{x-1}\leq x-3\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

Vấn đề 1: Phương pháp biến đổi tương đương

1.

a) $a^2 + b^2 + 3(a + b + 3) \geq ab$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 3a + 3b + 9 - ab \geq 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 6a + 6b + 18 - 2ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 6a + 9) + (b^2 + 6b + 9) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a + 3)^2 + (b + 3)^2 \geq 0$ (1a)

Ta thấy (1a) luôn đúng với mọi a, b nên (1) được chứng minh.

b) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^2 + 1 - 2a^2b^2 + 2a^2 - 2ac - 2a \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (a^2 - 2a + 1) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - 1)^2 + (a - c)^2 \geq 0$ (2a)

Ta thấy (2a) luôn đúng với mọi a, b, c nên (2) được chứng minh.

c) $a^2 + 3(b^2 + c^2 + d^2) \geqslant 2a(b + c + d)$ (3)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad \geq 0$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 9b^2 + 9c^2 + 9d^2 - 6ab - 6ac - 6ad \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 6ab + 9b^2) + (a^2 - 6ac + 9c^2) + (a^2 - 6ad + 9d^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 3b)^2 + (a - 3c)^2 + (a - 3d)^2 \geq 0$ (3a)

Ta thấy (3a) luôn đúng với mọi a, b, c, d nên (3) được chứng minh.

d) $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$ (4)

Ta có: (4) $\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 - 2a - 12b - 6c \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 \geq 0$ (4a)

Ta thấy (4a) luôn đúng với mọi a, b, c nên (4) được chứng minh.

2.

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$ (1a).

Ta thấy (1a) luôn đúng với mọi a, b thỏa $a + b \geq 0$ nên (1) được chứng minh.

b) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ (2a)

Ta thấy (2a) luôn đúng với mọi a, b thỏa $a + b \geq 0$ (do a) nên (2) được chứng minh.

3. a) $a + b + 1 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a + b + 1 - \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$

$\Leftrightarrow 2a + 2b + 2 - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{b} - 1\right)^2 \geq 0$ (1a)

Vì (1a) luôn đúng với mọi a, $b \geq 0$ nên (1) được chứng minh.

b) $(a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$ (2)

Ta có:

(2) $\Leftrightarrow a^6 + a^5b + ab^5 + b^6 \geq a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$.

$\Leftrightarrow a^5b + ab^5 \geq a^4b^2 + a^2b^4$.

$\Leftrightarrow a^5b + ab^5 - a^4b^2 - a^2b^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^5b - a^4b^2 + ab^5 - a^2b^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^4b(a - b) + ab^4(b - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ (2a)

Vì (2a) luôn đúng với mọi a, $b \geq 0$ nên (2) được chứng minh.

c) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}$ (3)

Ta có:

(3) $\Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2) \leq 2(a^3 + b^3)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$ (đúng)

4.

a) Ta có: $a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - (a - b + c)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b) + (2c + a - b)(b - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(2b - 2c) \geq 0$ (đúng)

b) Áp dụng a) ta có:

$a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - (a - b + c - d)^2 \geq (a - b + c)^2 - d^2 - (a - b + c - d)^2$ (*)

mà VP(*) $= (a - b + c + d)(a - b + c - d) - (a - b + c - d)^2$

$= (a - b + c - d)(2d) \geq 0$

nên $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - (a - b + c - d)^2 \geq 0$.

5. Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$.

Do đó: $\frac{a^3+b^3+c^3-abc}{a+b+c} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a+b+c} \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ (đúng)

6.

a) Ta có:

$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$ (đúng)

b) Ta có:

$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$ (đúng).

7. Đặt $p = \dfrac{b}{a}$. Vì $a > b > 0$ nên $0 < p < 1$ và do đó ta có:

$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \Leftrightarrow \frac{1 - t^m}{1 + t^m} > \frac{1 - t^n}{1 + t^n} \Leftrightarrow t^n > t^m \text{ (đúng vì } 0 < n < m)$$

8. Ta có:

$$\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \geq \frac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq \frac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{c^2+a^2} \geq \frac{bc}{c^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a}{c^2+a^2} \geq \frac{b}{c^2+b^2}$$

$\Leftrightarrow ac^2 + ab^2 \geq bc^2 + ba^2$

$\Leftrightarrow ac^2 + ab^2 - bc^2 - ba^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow c^2(a - b) - ab(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(c^2 - ab) \geq 0$ (luôn đúng)

Vấn đề 2: Phương pháp biến đổi hệ quả

1.

a) Ta có $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{ad - bc}{bd} < 0 \Rightarrow bd(ad - bc) < 0$ (*)

(*) $\Rightarrow ab^3 + bd(ad - bc) - ab^3 < 0$ (Thêm và bớt ab^3)

$\Rightarrow ab^3 + abd^2 - b^2cd - ab^3 < 0 \Rightarrow ab(b^2 + d^2) < b^2(ab + cd)$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{b^2} < \dfrac{ab + cd}{b^2 + d^2}$ (Chia hai vế cho $b^2(b^2 + d^2) > 0$)

$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ (ĐPCM)

(*) $\Rightarrow cd^3 + bd(ad - bc) - cd^3 < 0$ (Thêm và bớt cd^3)

$\Rightarrow cd^3 + abd^2 - b^2cd - cd^3 < 0 \Rightarrow d^2(cd + ab) < cd(b^2 + d^2)$

$\Rightarrow \frac{cd+ab}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2}$ (Chia hai vế cho $b^2(b^2 + d^2) > 0$)

$\Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ (ĐPCM)

b) Khi b, d > 0 thì (*) $\Leftrightarrow$ ad – bc < 0 $\Leftrightarrow$ ad < bc (**). Do đó ta có:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+ad < ab+bc \\ ad+cd < cb+cd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad < bc \\ ad < bc \end{cases}$$ (luôn đúng do (**))

2.

a) Vì $ax \geq y > 0$ nên $1 + x \geq 1 + y > 0$. Do đó:

$\frac{x}{1+x} \geqslant \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x + xy \geq y + xy \Leftrightarrow x \geq y$ (luôn đúng)

b) Áp dụng a), ta có:

$$VT = \frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|} \geq \frac{|a|+|b|+|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|} \geq \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$$ (ĐPCM)

(do $|a| + |b| + |ab| \geq |a - b| \geq 0$)

3. Ta có: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$

$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$

$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d}$

$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế ta có ĐPCM.

4.

Ta có a, b, c $\in$ [0; 1] nên:

$(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 - a^2 - b^2 - c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2$ (*)

Mặt khác: Do a, b, c, $\in$ [0; 1] nên $a^2b^2 \leqslant a^2b$, $b^2c^2 \leqslant b^2c$, $c^2a^2 \leqslant c^2a$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a - a^2b^2c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

5. $\forall x, y \in [0; 1]$ ta có $(1-x)(1-y) \geq 0 \Rightarrow x + y \leq 1 + xy$.

Áp dụng bất đẳng thức này ta được:

Với a, b, c $\in [0; 1]$, thì $bc \geq abc$, $ca \geq abc$, $ab \geq abc$ nên ta có:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leqslant \frac{a}{1+abc}+\frac{b}{1+cab}+\frac{c}{1+abc}$$

$$= \frac{a+b+c}{1+abc}$$

$$\leq \frac{1+ab+c}{1+abc} \text{ (Do } a+b \leq 1+ab)$$

$$\leq \frac{1+1+abc}{1+abc} \text{ (do } ab \in [0; 1] \text{ nên } ab \leq 1)$$

$$\leq \frac{2+2abc}{1+abc} = 2 \text{ (ĐPCM)}$$

6. Ta có

$2(1-a)(1-b) = 2 - 2a - 2b + 2ab$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2a - 2b + 2ab + 1$

$= (a + b - 1)^2 + c^2 + d^2 \geqslant c^2 + d^2 \geqslant 2|cd|$

Tương tự: $2(1-c)(1-d) \geqslant 2|ab|$.

Nhân theo vế ta được: ĐPCM.

7.

a) $$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \Leftrightarrow 1 < 2\left(k+1-\sqrt{k(k+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2 > 0 \text{ (đúng)}$$

b) Áp dụng a) ta được:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$< \frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{1}{2}+\sqrt{2} < 2.$$

8.

a) $$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} \Leftrightarrow k - 1 < k^3 - k^2(k-1) \Leftrightarrow k^2 - k + 1 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

b) Áp dụng a), ta có:

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3} < \frac{1}{1^3}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

Vấn đề 3: Phương pháp áp dụng bất đẳng thức Cô-si

1.

a) Ta có:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}=2c \qquad (a)$$

$$\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}=2a \qquad (b)$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b \qquad (c)$$

Cộng theo vế (a), (b) và (c) ta có ĐPCM.

b) Ta có: $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$; $b^3+c^3\geq b^2c+bc^2$; $c^3+a^3\geq c^2a+ca^2$

$\Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(b+a)$

$\geq 2a^2\sqrt{bc}+2b^2.\sqrt{ca}+2c^2.\sqrt{ba}$ (ĐPCM)

2.

a) Ta có: $1+a^2\geq 2|a|\geq 0$ (a)

$b^2+c^2\geq 2\sqrt{b^2c^2}\geq 2|bc|\geq 0$ (b)

$1+b^2\geq 2|b|\geq 0$ (c)

Nhân theo vế của (a), (b) và (c) ta được:

$(a^2+1)(b^2+c^2)(b^2+1)\geq 8|a.bc.b|\geq 8ab^2c$ (ĐPCM)

b) * Nếu $a.b<0$ thì bất đẳng thức đúng.

* Nếu $a.b\geqslant 0$ thì

$16ab(a-b)^2=4.4ab.(a-b)^2$

$$\leqslant 4.\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^4=(a+b)^4 \text{ (ĐPCM)}$$

3.

a) Vế trái $\geq \frac{2\sqrt{bc}}{a}+\frac{2\sqrt{ca}}{b}+\frac{2\sqrt{ab}}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}.2\sqrt{ab}}{abc}}=6$ (ĐPCM)

b) Ta có $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow (2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9 \text{ (Đúng).}$$

c) Ta có bất đẳng thức $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Do đó: $\frac{3}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)$; $\frac{2}{b+c}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)$; $\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{3}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\right).$$

d) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+1\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}.\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}}=3.\frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+1\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}.\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}}=3.\frac{b}{c}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+1\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}.\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}}=3.\frac{c}{a}$$

Cộng theo vế ta được:

$$2\left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\right)\geq 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-3$$

$$=2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right)$$

$$\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}-3\right)$$

$$=2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ (\text{ĐPCM})$$

4. Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=9\ (*).$$

Vế trái (*) = $[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9$

Do đó (*) $\Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

5. a) Ta có: $1 - a = b + c \geq 2\sqrt{bc} \geq 0$;

$1 - b = c + a \geq 2\sqrt{ca} \geq 0$

$1 - c = a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0$.

Nhân theo vế ta có ĐPCM.

b) Ta có: $1 = a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$

$\Rightarrow 1 \geq 4(a+b)c \Rightarrow a + b \geq 4(a+b)^2c \geq 4(2\sqrt{ab})^2.c = 16abc.$

6.

a) Ta có: $a^2b = \frac{1}{2}.a.a.2b \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+a+2b}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^3 \leqslant \frac{4}{27}$

b) Ta có: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Do đó:

$$ab + \frac{1}{ab} = 16ab + \frac{1}{ab} - 15ab$$

$$\geq 2\sqrt{16ab.\frac{1}{ab}} - 15.\frac{1}{4} = 8 - \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

7.

Ta có: $ab\sqrt{c-1} = ab\sqrt{1(c-1)} \leqslant ab\frac{1+(c-1)}{2} = \frac{abc}{2}$

$$bc\sqrt{a-9} = \frac{1}{3}bc\sqrt{9(a-9)} \leqslant \frac{bc}{3}.\frac{9+(a-9)}{2} = \frac{abc}{6}$$

$$ca\sqrt{b-4} = \frac{1}{2}ca\sqrt{4(b-4)} \leqslant \frac{ca}{2}.\frac{4+(b-4)}{2} = \frac{abc}{4}$$

Cộng theo vế ta có ĐPCM.

8.

a) Ta có $(p-a)(p-b) \leqslant \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$ (ĐPCM)

b) Áp dụng a) ta có:

$$(p-a)(p-b) \leqslant \frac{c^2}{4};\ (p-b)(p-c) \leqslant \frac{a^2}{4};\ (p-c)(p-a) \leqslant \frac{b^2}{4}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

c) Ta có: $|b - c| \leq a \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 \leq a^2$;

$|c - a| \leq b \Rightarrow c^2 - 2ca + a^2 \leq b^2$;

$|a - b| \leq c \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq c^2$.

Cộng theo vế có đpcm.

d) Ta có: $h_a + h_b + h_c = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2pr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).r \geq 9r.$

9.

a) Ta có: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$; $\frac{b^2}{c} + 4c \geq 4b$; $\frac{4c^2}{a} + a \geq 4c$.

Cộng theo vế ta có:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{4c^2}{a} + b + 4c + a \geq 2a + 4b + 4c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{4c^2}{a} \geq a + 3b.$$

b) Ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{4(b+c)}{9} \geq \frac{4a}{3}; \quad \frac{b^2}{c+a} + \frac{4(c+a)}{9} \geq \frac{4b}{3}; \quad \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) \geq 8c$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} + \frac{13a+13b+8c}{9} \geq \frac{4a+4b+24c}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b).$$

10.

Ta có: $2\sqrt{x-2} = 2.1.\sqrt{(x-2)} \leq 1^2 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = x - 1;$

$$4\sqrt{y-3} = 2.2.\sqrt{y-3} \leq 2^2 + \left(\sqrt{y-3}\right)^2 = y + 1;$$

$$6\sqrt{z-5} = 2.3.\sqrt{z-5} \leq 3^2 + \left(\sqrt{z-5}\right)^2 = z + 4.$$

Cộng theo vế ta được:

$$x + y + z + 4 \geq 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}.$$

Do đó đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 2 \\ \sqrt{z-5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 14 \end{cases}.$

Vấn đề 4: **Phương pháp áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki**

1.

a) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$3x + 4y \le \sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 3x + 4y = 7$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant \frac{47}{25} \text{ (ĐPCM)}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$3x + 4y = \sqrt{3}.\sqrt{3}x + 2.2y \le \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2^2}.\sqrt{(\sqrt{3}x)^2 + (2y)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7}\sqrt{3x^2 + 4y^2} \geqslant 3x + 4y = 7$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 \geqslant 7 \text{ (ĐPCM)}$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$\left(\frac{1}{3x} + \frac{4}{y}\right).(3x + 4y) = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{3x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2\right).\left(\left(\sqrt{3x}\right)^2 + \left(2\sqrt{y}\right)^2\right)$$

$$\ge \left(\frac{1}{\sqrt{3x}}.\sqrt{3x} + \frac{2}{\sqrt{y}}.2\sqrt{y}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 7\left(\frac{1}{3x} + \frac{4}{y}\right) \geqslant 25 = 7 \Rightarrow \frac{1}{3x} + \frac{4}{y} \geqslant \frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant \frac{47}{25} \text{ (ĐPCM)}$$

2.

a) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$x + y = \frac{1}{2}.2x + \frac{1}{3}.3y \le \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}.\sqrt{(2x)^2 + (3y)^2}$$

$$\Rightarrow x + y \le \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}.\sqrt{13} = \frac{13}{6} \text{ (ĐPCM)}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$2x + 3y = 1.2x + 1.3y \le \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{(2x)^2 + (3y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y \le \sqrt{2}.\sqrt{13} = \sqrt{26} \text{ (ĐPCM)}$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{13}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\left(4x^2+9y^2\right)\geq\frac{1}{13}\left(\frac{1}{x}.2x+\frac{1}{y}.3y\right)^2=\frac{25}{13}.$$

Vậy $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geqslant\frac{25}{13}$ (ĐPCM)

3.

a) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geqslant\frac{1}{2}\left(x.1+y.1\right)^2=2.$$

Vậy $x^2+y^2\geq 2$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho 4 số ta có:

$$x^4+y^4=\frac{1}{2}\left[(x^2)^2+(y^2)\right]\left(1^2+1^2\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(x^2.1+y^2.1\right)\geqslant 2$$

Vậy $x^4+y^4\geq 2$ (ĐPCM).

4. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, ta có:

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{c}\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}.\sqrt{c}$$

$$\leq\sqrt{(c+a-c)(b-c+c)}\leqslant\sqrt{ab}\ \text{(ĐPCM).}$$

5. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(\sqrt{x}.\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{y}.\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{z}.\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{x+y+z}\ \text{(ĐPCM)}$$

6. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, ta có:

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$$

$$=\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right].\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]$$

$$\geq \left(\sqrt{b+c}.\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{c+a}.\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{a+b}.\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \text{ (ĐPCM)}$$

7. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, ta có:

$$x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{y+1+x+1}$$

$$= \sqrt{2+x+y}$$

$$\leq \sqrt{2+\sqrt{1+1}.\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ (ĐPCM)}$$

8. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, ta có:

$3c^2 = [1^2+1^2+(-1)^2][(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2]$

$\geq [(x+a)+(y+b)-(x+y)]^2$

$= (a+b)^2$.

Vậy $(a+b)^2 \leq 3c^2$.

***Vấn đề 5:* Phương pháp chứng minh bất đẳng thức có chứa dấu trị tuyệt đối**

1. Vế trái $= \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(-x-2)^2+(3-y)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-x-2)^2+(3-y)^2}\right]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|(x+1)+(y+2)\right|+\left|(-x-2)+(3-y)\right|\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x+y+3\right|+\left|1-x-y\right|\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x+y+3+1-x-y\right|\right) = 2\sqrt{2}.$$

2. Ta có: $\sqrt{x^2+4y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{x^2+(2y)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|x+2y|$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-x)^2+(3-y)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|-x+3-y|.$$

Do đó:

$$\sqrt{x^2+4y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\frac{|1-y|}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x+2y|+|-x+3-y|+|1-y|\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}|x+2y-x+3-y+1-y| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

3. Ta có:

$$\text{Vế trái} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}+|x-4|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}.\sqrt{x^2+(y+2)^2}+|x-4|$$

$$\geq \left|\frac{x-2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right|+\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(-2-y)\right|+|x-4|$$

$$\geq |x-1-\sqrt{3}|+|x-4|$$

$$\geq 3-\sqrt{3}.$$

§2. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1.

a) Ta có $f(x) = \frac{x^2+5x+16}{x} = x+5+\frac{16}{x} \geq 5+2\sqrt{x.\frac{16}{x}} = 5+2.4 = 13.$

Khi $x = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x = 4$ thì $f(x) = 13.$

Vậy GTNN của $f(x)$ với $x > 0$ là 13.

b) Ta có: $f(x0 = 7x + \frac{3x+7}{x+1} = 7x+3+\frac{7}{x+1}$

$$= 7(x+1)+\frac{7}{x+1}-4 \geq 2\sqrt{7(x+1).\frac{7}{x+1}}-4 = 10.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 7(x+1) = \frac{7}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy GTNN của $f(x)$ với $x > -1$ là 10.

c) Ta có: $0 < x + y = 1.x + 1.y \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$.

Do đó: $A = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} \ge \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $A = 2\sqrt{2}$. Vậy $\min A = 2\sqrt{2}$.

2. a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số ta có:

$$y = \frac{1}{2}.x.x(6-2x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+6-2x}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}.2^3 = 4.$$

Khi $x = 6 - 2x \Leftrightarrow x = 2$ thì $y = 4$.

Vậy GTLN của y với $0 \le x \le 3$ là 4.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki ta có:

$$A = 1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{y+1}+1.\sqrt{z+1}$$
$$\le \sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{(x+1)+(y+1)+(z+1)} = 2\sqrt{3}.$$

Khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì $y = 2\sqrt{3}$.

Vậy GTLN của y với $x, y, z \ge -1$ là $2\sqrt{3}$.

c) Ta có: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4 \Rightarrow \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Tương tự ta có $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ và $\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$B = \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Khi $a = b = c = 3$ thì $B = \frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của B với $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 1$ là $\frac{1}{2}$.

3. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \le \left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được $M \le \frac{8}{729}$.

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $M = \frac{8}{729}$. Vậy $\max M = \frac{8}{729}$.

4. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, ta có:

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2}.\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)+\frac{1}{2}y\right|$$

$$\sqrt{(1+x)^2+y^2}.\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)+\frac{1}{2}y\right|$$

Do đó

$$M \ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)+\frac{y}{2}\right|+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)+\frac{y}{2}\right|+|2-y|$$

$$\ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)+\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)+\frac{y}{2}+2-y\right| = 2+\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1-x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{1+x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = 0$ và $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min M = 2+\sqrt{3}$.

5. a) Ta có: $(a+b)^2 \ge 4ab \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$.

Tương tự ta có: $\frac{bc}{b+c} \le \frac{b+c}{4}$ và $\frac{ca}{c+a} \le \frac{c+a}{4}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$T \le \frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4} = \frac{a+b+c}{2} \le \frac{1}{2}.$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $T = \frac{1}{2}$. Vậy $\max T = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $M = \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \ge \frac{9}{(1+a)+(1+b)+(1+c)}$

$$= \frac{9}{3+a+b+c} \ge \frac{9}{3+1} = \frac{9}{4}.$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $M = \frac{9}{4}$. Vậy GTNN của M là $\frac{9}{4}$.

6. Ta có (1) $\Rightarrow \frac{1}{1+a} \geq (1-\frac{1}{1+b})+(1-\frac{1}{1+c}) = \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{(1+a)(1+c)}}$ và $\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ba}{(1+b)(1+a)}}$

Nhân theo vế ta được $\left(\frac{1}{1+a}\right)\left(\frac{1}{1+b}\right)\left(\frac{1}{1+c}\right) \geq 8\sqrt{\frac{(abc)^2}{[(1+a)(1+b)(1+c)]^2}}$

$$\Rightarrow 1 \geq 8abc \Rightarrow P \leq \frac{1}{8}.$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì $P = \frac{1}{8}$. Vậy $\max P = \frac{1}{8}$.

7. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leq \frac{(a+b)^2+(1-ab)^2}{2} = \frac{1+a^2+b^2+a^2b^2}{2(1+a^2+b^2+a^2b^2)} = \frac{1}{2}$$

Do đó $|P| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{1}{2}$.

Khi $a = 0$ và $b = -1$ hay $a = -1$ và $b = 0$ thì $P = -\frac{1}{2}$.

Khi $a = 0$ và $b = 1$ hay $a = 1$ và $b = 0$ thì $P = \frac{1}{2}$.

Vậy $\max P = \frac{1}{2}$ và $\min P = -\frac{1}{2}$.

§3. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Vấn đề 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

1. Điều kiện: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

3. Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1>0 \\ (x-3)(x+4) \neq 0 \\ 6-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x>1 \\ x \neq 3 \wedge x \neq -4 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<6 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

4. Điều kiện: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 16-2x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ |x|-\sqrt{x+2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 8 \\ x \geq -2 \\ x^2 \neq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ x \neq -1 \wedge x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 8.$

Vấn đề 2: Xét sự tương đương của hai bất phương trình cho trước

1.

a) $4x-6+\dfrac{1}{x-2} \geq 2+\dfrac{1}{x-2}$ (1) và $4x-8 \geq 0$ (2).

Ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của (2) nhưng $x = 2$ không là nghiệm của (1), do đó (1) và (2) không tương đương.

b) $(x^2-4x+5)(x-5)>0$ (1) và $x-5>0$ (2).

Ta có (1) nhận được từ (2) bằng cách nhân hai vế của (2) với $h(x) = x^2-4x+5>0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên (1) và (2) tương đương nhau.

c) $x-12 \geq 0$ (1) và $(x-12)^2 \geq 0$ (2).

Ta thấy $x = 0$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1) nên (1) và (2) không tương đương.

d) $\sqrt{(x-1)(x-2)} \geq x$ (1) và $\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2} \geq x$ (2).

Ta thấy $x = 0$ là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2) nên (1) và (2) không tương đương.

2.

- Bạn Bình giải sai.
- Vì bạn Bình đã không đặt điều kiện cho bất phương trình ban đầu trước khi bình phương hai vế nên sau khi giải bạn Bình đã không so sánh $x \leq 1$ với điều kiện.

Vấn đề 3: Giải bất phương trình

1. a) * Điều kiện: $\begin{cases} -x-10 \geq 0 \\ x^2-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -10 \\ x \leq -4 \vee x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -10.$

* Ta thấy với $x \leq -10$ thì bất phương trình có vế trái ≤ 0 và vế phải > 0 nên bất phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta thấy với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình có:

Vế trái $\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}.\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}} = 4$ nên bất phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Ta có vế trái $= \sqrt{(2x+1)^2+1} + \sqrt{(x-3)^2+1} \geq 2$.

Do đó bất phương trình vô nghiệm.

d) Ta có vế trái $= \left(\sqrt{x-2}+1\right)^2 + \sqrt{x^2+1} > 2 > 0$.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

2.

a) * Điều kiện: $\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

* Thay $x = 3$ vào thử lại ta thấy $x = 3$ thỏa bất phương trình. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x = 3$.

b) * Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

* Với điều kiện trên thì bất phương trình trở thành $0 < 3$ vô lí. Vậy bất phương trình vô nghiệm.

c) * Điều kiện: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

* Khi đó bất phương trình tương đương với $x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6$.

So sánh với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $4 < x \leq 6$.

d) * Điều kiện: $(x - 3)(x^2 - 10x + 25) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

* Khi đó $x + 5 > 0$ nên bất phương trình tương đương với

$(x - 3)(x^2 - 10x + 25) > 0 \Leftrightarrow x > 3$ và $x \neq 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x > 3$ và $x \neq 5$.

3.

a) $x^4 - 4x^2 + 6 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + 2 > 0$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $(2x - 3)^2(x^2 - 2x + 2) \geqslant 0$

Ta có: $(2x - 3)^2 \geq 0 \ \forall x \in R$ và $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$(2x - 3)^2(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \ \forall x \in R$.

c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$

Ta có: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + \left(x^2 + \dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2 + \dfrac{x^2}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$..

d) $5x^2 + (x - 2)^2 + \dfrac{2}{x^2+1} \geqslant x^2$ (*).

Ta có $5x^2 + (x - 2)^2 + \dfrac{2}{x^2+1} > 5x^2 \geq x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy (*) đúng với mọi x.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Vấn đề 1: Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn

1.

a) $\frac{x+2}{3}+x-3>x-2 \Leftrightarrow x+2+3x-9>3x-6 \Leftrightarrow x>1$. Vậy $S=(1;+\infty)$.

b) $\frac{3x+5}{2}-1 \leqslant \frac{x+2}{3}+x \Leftrightarrow 9x+15-6 \leq 2x+4+6x \Leftrightarrow x \leq -5$.

Vậy $S=(-\infty;-5]$.

c) $(1-\sqrt{2})x<3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>\frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

Vậy $S=(1-\sqrt{2};+\infty)$.

d) $(x+\sqrt{3})^2 \geqslant (x-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2+2\sqrt{3}x+3 \geqslant x^2-2\sqrt{3}x+3+2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x \geqslant 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$. Vậy $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

2.

a) $mx+6<2x+3m \Leftrightarrow (m-2)x<3m-6$ (1)

* $a>0 \Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$: (1) $\Leftrightarrow x<\frac{3m-6}{m-2}=3$.

* $a<0 \Leftrightarrow m<2$: (1) $\Leftrightarrow x>\frac{3m-6}{m-2}=3$.

* $a=0 \Leftrightarrow m=2$: (1) $\Leftrightarrow 0x<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Kết luận: + $m>2$: $S=(-\infty;3)$.

+ $m<2$: $S=(3;+\infty)$.

+ $m=2$: $S=\varnothing$.

b) $2(x-m)-(m+1)^2 \geqslant 3-mx \Leftrightarrow (m+2)x \geq m^2+4m+4=(m+2)^2$ (2).

* $a>0 \Leftrightarrow m+2>0 \Leftrightarrow m>-2$: (2) $\Leftrightarrow x \geq \frac{(m+2)^2}{m+2}=m+2$.

* $a<0 \Leftrightarrow m<-2$: (2) $\Leftrightarrow x \leq m+1$.

* $a=0 \Leftrightarrow m=-2$: (2) $\Leftrightarrow 0x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: + $m>-2$: $S=[m+2;+\infty)$.

+ $m<-2$: $S=(-\infty;m+2]$.

+ $m=-2$: $S=\mathbb{R}$.

c) $2x + m^2 \geq mx + 3m - 2 \Leftrightarrow (m-2)x \leq m^2 - 3m + 2 = (m-2)(m-1)$ (3)

* $a > 0 \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$: (3) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{(m-2)(m-1)}{m-2} = m - 1$.

* $a < 0 \Leftrightarrow m < 2$: (3) $\Leftrightarrow x \geq m - 1$.

* $a = 0 \Leftrightarrow m = 2$: (3) $\Leftrightarrow 0x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: + $m > 2$: $S = (-\infty; m - 1)$.

+ $m < 2$: $S = (m - 1; +\infty)$.

+ $m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

d) $(2m + 1)x + 2 < 3m + 3x \Leftrightarrow (2m - 2)x < 3m - 2$ (4)

* $a > 0 \Leftrightarrow 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$: (4) $\Leftrightarrow x < \dfrac{3m-2}{2m-2}$.

* $a < 0 \Leftrightarrow m < 1$: (4) $\Leftrightarrow x > \dfrac{3m-2}{2m-2}$.

* $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (4) $\Leftrightarrow 0x \geq 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Kết luận: + $m > 1$: $S = (-\infty; \dfrac{3m-2}{2m-2})$.

+ $m < 1$: $S = (\dfrac{3m-2}{2m-2}; +\infty)$.

+ $m = 1$: $S = \varnothing$.

Vấn đề 2: Điều kiện của tham số để bất phương trình thỏa điều kiện cho trước

1.

a) $(m^2 + m + 1)x - 5m \geq (m^2 + 2)x - 3m - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x - 2m + 1 \geq 0$ (1)

Do đó: (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ -2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

b) $(m^2 - m)x + m < 2x + 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x + m - 1 < 0$ (2)

Do đó: (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

c) $(m - 1)x > 2m - 1$ (3)

Do đó: (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ -2m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

d) $(m - 1)x > m^2 - 1$ (4)

Ta có: (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 1 - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

2.

a) $m^2(x-1) \geq 9x + 3m + 4 \Leftrightarrow (m^2-9)x - m^2 - 3m + 4 \geq 0$ (1)

Ta có: (1) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ -m^2 - 3m + 4 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m^2 + 3m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$

b) $\sqrt{(m^2-4)x - m + 3} \geq 2 \Leftrightarrow (m^2-4)x - m + 3 \geq 4$

$\Leftrightarrow (m^2-4)x - m - 1 \geq 0$ (2)

Ta có: (2) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ -m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$

c) $(m^2 - 2m - 8)x > m^2 + 3m$ (3)

Ta có: (3) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 8 = 0 \\ m^2 + 3m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \vee m = -2 \\ m^2 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{mx + m^2 + m}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{mx + m^2 + m} \geq 3 \Leftrightarrow mx + m^2 + m - 9 \geq 0$ (4).

Ta có: (4) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 + m - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

3. $\sqrt{4-x}\left[(m^2+1)x - 5m\right] \geq 0$ (1)

* $x = 4$: (1) $\Leftrightarrow 0 \geq 0$ (luôn đúng).

* $2 \leq x < 4$: (1) $\Leftrightarrow (m^2 + 1)x - 5m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5m}{m^2+1}$.

Do đó:

(1) nghiệm đúng với mọi $x \in [2; 4]$

$\Leftrightarrow \dfrac{5m}{m^2+1} = 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

4. $(m + 2)x > m^2 - m - 6 \Leftrightarrow (m + 2)x - m^2 + m + 6 > 0$ (1)

a) Vì (1) có dạng $ax + b > 0$ nên

(1) nghiệm đúng với mọi $x > 0$

$\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{a} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2=0 \\ -m^2+m+6>0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m+2>0 \\ \dfrac{m^2-m-6}{m+2} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m-3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 3.$$

b) Vì (1) có dạng $ax + b > 0$ nên

$$\text{(1) có nghiệm là } x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{a}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ \dfrac{m^2-m-6}{m+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

5. $mx - m - 4 < 0$ (1)

a) Ta có (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ -m-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

Do đó: (1) có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

b) (1) nghiệm đúng với mọi $x < 3$

$\Leftrightarrow (-\infty; 3) \subset S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b<0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a>0 \\ 3 \leqslant \dfrac{-b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ -m-4<0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m>0 \\ \dfrac{m+4}{m} \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } \begin{cases} m>0 \\ m+4 \geqslant 3m \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } 0 < m \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x < 3 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

6. $(m-1)x + 3 - m > 0$ (1) và $(m+1)x + 2 - m > 0$ (2)

Ta có (1) và (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ b_1 \leqslant 0 \\ b_2 \leqslant 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a_1 < 0 \\ a_2 < 0 \\ \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=m+1=0 \\ b_1 \leqslant 0 \\ b_2 \leqslant 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a_1 a_2 > 0 \\ a_2 b_1 = a_2 b_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1)>0 \\ (m+1)(3-m)=(m-1)(2-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \text{ hay } m>1 \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vấn đề 3: **Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

1.

a) $\begin{cases} \dfrac{5x-7}{3} \geq 3-x \\ \dfrac{1+22x}{13} < 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7 \geq 9-3x \\ 1+22x < 39x+52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x \geq 16 \\ 17x > -51 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$. Vậy $S = [2; +\infty)$.

b) $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ 4x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$. Vậy $S = (-1; 7)$.

c) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 - 3x + 6 \\ x^3 - 6x^2 - 7x + 11 < (x-2)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 5 \\ x^3 - 6x^2 - 7x + 11 < x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -19x < -19 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $S = (1; +\infty)$.

d) $\begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ 3x < x+8 \\ \dfrac{9-3x}{2} \leq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x < 8 \\ 9-3x \leq 2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 4 \\ 5x \geq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3 \leq x < 4$. Vậy $S = [3; 4)$.

2.

a) $\begin{cases} 4x-5 > -x+2 \\ 3x+6m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x > 7 \\ 3x < -6m+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 5-2m \end{cases}$.

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < 5 - 2m \Leftrightarrow m < 2$.

b) $\begin{cases} 4(x-3)+1 \leq 3(x-3) \\ x+m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1-m \end{cases}$.

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -2$.

3. a) $\begin{cases} 2x+7 < 8x-5 \\ m+5 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 12 \\ x < \dfrac{m+5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$.

Do đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{m+5}{2} \leq 2 \Leftrightarrow m + 5 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq -1$.

b) $\begin{cases}(x-3)^2 \geq x^2+7x+17 \\ 2\sqrt{m} \leq 8+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-13x \geq 26 \\ 2x \geq 2\sqrt{m}-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq -2 \\ x \geq \sqrt{m}-4\end{cases}$.

Do đó: Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow -2 < \sqrt{m}-4 \Leftrightarrow \sqrt{m} > 2 \Leftrightarrow m > 4$.

4. Ta có:

$$\begin{cases}3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \\ m^2x+3 > (3m-2)x+3m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x \geq -6 \\ 6x \leq 6 \\ (m^2-3m+2)x > 3m-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3 \leq x \leq 1 \\ (m-1)(m-2)x > 3(m-1)\ (*)\end{cases}$$

TH1: $m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hay $m > 2$:

$(*) \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{m-2}$.

Do đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{m-2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{-m+5}{m-2} > 0 \Leftrightarrow 2 < m < 5$ (thỏa điều kiện).

TH2: $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$:

$(*) \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{m-2}$.

Do đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{m-2} < -3 \Leftrightarrow \dfrac{3m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$ (thỏa điều kiện).

TH3: $m = 1$: $(*) \Leftrightarrow 0x > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Vậy $m = 1$ nhận.

TH4: $m = 2$: $(*) \Leftrightarrow 0x > 3 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Vậy $m = 2$ nhận.

Kết luận: Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m < 5$.

5.

a) $\begin{cases}2m(x+1) \geq -2x+3 \\ 2mx+3 \geq 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m+2)x \geq 3-2m & (a) \\ (2m-2)x \geq -3 & (b)\end{cases}$ (1).

TH1: $m = -1$: (a) $\Leftrightarrow 0x \geq 5 \Rightarrow$ (a) vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ (loại)

TH2: $m = 1$: (a) $\Leftrightarrow 4x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$ và (b) $\Leftrightarrow 0x \geq -3$

$\Rightarrow$ (1) vô số nghiệm $\Rightarrow m = 1$ (loại)

TH3: $m < -1$: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq \dfrac{3-2m}{2m+2} \\ x \leq \dfrac{-3}{2m-2}\end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\Rightarrow m < -1$ (loại)

TH4: m > 1: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3-2m}{2m+2} \\ x \geq \dfrac{-3}{2m-2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\Rightarrow$ m > 1 (loại)

TH5: $-1 < m < 1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3-2m}{2m+2} \\ x \leqslant \dfrac{-3}{2m-2} \end{cases}$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{3-2m}{2m+2} = \dfrac{-3}{2m-2}$

$\Leftrightarrow (2m-2)(3-2m) = -6m-6 \Leftrightarrow -4m^2 + 10m - 6 = -6m - 6$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = 4$.

So sánh điều kiện ta được $m = 0$.

Vậy: Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 3}{x} \geqslant x \\ m(x-1) \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+3}{x} \geqslant 0 \\ mx \geqslant m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leqslant 3 \\ mx \geqslant m+2 \end{cases}$ (2)

TH1: m = 0: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leqslant 3 \\ 0x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Vậy m = 0 (loại)

TH2: m > 0: (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{m+2}{m}$.

Do đó: Hệ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{m+2}{m} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận)

TH3: m < 0: (2) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{m+2}{m}$. $\Rightarrow$ Hệ (2) không có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ m < 0 (loại)

Vậy hệ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 1$.

6. Ta có f(x) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - m - 3 \geqslant 0 \\ 2m + 3 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{m+3}{2} \\ x \leqslant 2m+3 \end{cases}$.

a) f(x) có tập xác định là $[2; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{2} = 2 \\ 2m+3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

b) f(x) xác định với mọi $x \in [2; 5] \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{2} \leqslant 2 \\ 2m+3 \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$.

§5. DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Vấn đề 1: **Xét dấu một biểu thức**

1.

a) $f(x) = \dfrac{9-3x}{2x+4}$.

* $9 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

* $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		3		$-\infty$
$9 - 3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x + 4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

b) $f(x) = -1 + \dfrac{x-7}{2x-2} = \dfrac{-2x+2+x-7}{2x-2} = \dfrac{-x-5}{2x-2}$.

* $-x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow x = -5$.

* $2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		1		$-\infty$
$-x - 5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x - 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5; 1)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

c) $f(x) = (2x - 4)(4 - x)^2(12 - 2x)$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$;

$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$;

$12 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		4		6		$-\infty$
$2x - 4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(4 - x)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$12 - 2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2; 4) \cup (4; 6)$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

d) $f(x) = \dfrac{2x(x-1)(x+2)}{(x-4)(7-x)}$

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 7$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		4		7		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$7-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

Vậy $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (4; 7)$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (1; 4) \cup (7; +\infty)$.

2. a) $f(x) = \dfrac{x^2 - (2x-6)^2}{x^2 - 1} = \dfrac{(3x-6)(-x+6)}{(x-1)(x+1)}$

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $-x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		2		6		$+\infty$
$3x-6$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+6$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (2; 6)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (6; +\infty)$.

b) $f(x) = (x^2 - 4)(6 - 2x)(x - 1) = (x - 2)(x + 2)(6 - 2x)(x - 1)$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$6-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (2; 3)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

c) $f(x) = (2x + 6)(4 - 2x)^2(10 - x)$

$2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

$4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$10 - x = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		2		10		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(4 - 2x)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$10 - x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 2) \cup (2; 10)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (10; +\infty)$.

d) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)(x + 2)}{(x + 4)(6 - x)} = \dfrac{x(x - 2)(x + 2)}{(x + 4)(6 - x)}$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;

$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$; $6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-2		0		2		6		$+\infty$
$2x$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x - 2$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x + 2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x + 4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$6 - x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (2; 6)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -2) \cup (0; 2) \cup (6; +\infty)$.

Vấn đề 2: Ứng dụng của dấu nhị thức để giải bất phương trình

1. a) $\dfrac{(3 + x)(2 - x)}{x + 1} \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$3 + x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$2 - x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x + 1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Vế trái		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3] \cup (-1; 2]$.

b) $\frac{3}{1-x} > \frac{5}{2x+9} \Leftrightarrow \frac{6x+27-5+5x}{(1-x)(2x+9)} > 0 \Leftrightarrow \frac{11x+22}{(1-x)(2x+9)} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		-2		1		$+\infty$
$11x+22$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Vế trái		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\frac{9}{2}) \cup (-2; 1)$.

c) $\frac{(3-x)(x^2-4x+4)}{x^3-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(3-x)(x-2)^2}{x(x-1)(x+1)} \leqslant 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x-2)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

d) $\frac{2x-3}{3x+5} < \frac{3x+5}{2x-3} \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2-(3x+5)^2}{(3x+5)(2x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(5x+2)(-x-8)}{(3x+5)(2x-3)} < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-8		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x-8$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$3x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
f(x)		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; -8) \cup \left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

e) $\frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3x+2-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; -1) \cup \{0\}$.

f) $\dfrac{x^3-3}{x^2-1} \geqslant 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-3-3x^2+3}{x^2-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
f(x)		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

2.

a) $|4-3x| \leqslant 8 \Leftrightarrow -8 \leq 4-3x \leq 8 \Leftrightarrow -12 \leq -3x \leq 4 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant 4$.

b) $|x-1|+|-2x+6| \geqslant x-5$

Ta có $|x-1| + |-2x+6| \geq |(x-1) + (-2x+6)| = |x-5| \geq x-5 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

c) $|2x+4| + |x+1| < -3x-1$ (*)

* $x < -2$: $2x+4 < 0$ và $x+1 < 0$ nên

(*) $\Leftrightarrow -2x-4-x-1 < -3x-1 \Leftrightarrow -4 < 0$ (luôn đúng)

* $-2 \leq x < -1$: $2x+4 \geq 0$ và $x+1 < 0$ nên:

(*) $\Leftrightarrow 2x+4-x-1 < -3x-1 \Leftrightarrow 4x < -4 \Leftrightarrow x < -1$ (thỏa điều kiện)

* $x \geq -1$: $2x+4 > 0$ và $x+1 \geq 0$ nên

(*) $\Leftrightarrow 2x+4+x+1 < -3x-1 \Leftrightarrow 6x < -6 \Leftrightarrow x < -1$ (loại)

Vậy nghiệm bất phương trình là $x < -1$.

d) $\dfrac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)} \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2|2x-1|-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$ (1)

* $x \leq \dfrac{1}{2}$: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2(-2x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(-x+1)(x+4)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
$-x+1$		+	|	+	|	+	0	−	|	−	
$x+4$		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
$x+1$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	|	−	0	+	
f(x)		−	0	+	‖	−	0	+	‖	−	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S_1 = (-\infty; -4] \cup (-1; \frac{1}{2}]$.

* $x > \frac{1}{2}$: (1) $\Leftrightarrow \frac{-x^2+5x}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(-x+5)x}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		2		5		$+\infty$
$-x+5$		+	|	+	|	+	|	+	0	−	
x		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$x+1$		−	0	+	0	+	|	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	0	+	0	+	
f(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S_2 = [\frac{1}{2}; 2) \cup [5; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; -1] \cup (-1; 2) \cup [5; +\infty)$.

c) $\frac{(2x-3)(|x-1|+2)}{|x-1|-2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(|x-1|+2)^2}{(x-1)^2-4} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x+1)(x-3)} \leq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x-3$		−	|	−	0	+	|	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	|	−	0	+	
Vế trái		−	‖	+	0	−	‖	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup [\frac{3}{2}; 3)$.

3. a) $\frac{x-4m}{8-x} > 0$ (1)

Ta có: $x - 4m = 0 \Leftrightarrow x = 4m$.

$8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

TH1: $4m < 8 \Leftrightarrow m < 2$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$4m$		8		$+\infty$
$x - 4m$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$8 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
Vế trái		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4m; 8)$.

TH2: $4m > 8 \Leftrightarrow m > 2$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		8		$4m$		$+\infty$
$x - 4m$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$8 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
Vế trái		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (8; 4m)$.

TH3: $4m = 8 \Leftrightarrow m = 2$:

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x-8}{8-x} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$. Vậy $S = \varnothing$.

Kết luận: + $m < 2$: $S = (4m; 8)$.

+ $m = 2$: $S = \varnothing$.

+ $m > 2$: $S = (8; 4m)$.

b) $(2x - 6)(x - m - 1) \leqslant 0$

Ta có: $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$x - m - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m + 1$.

TH1: $m + 1 < 3 \Leftrightarrow m < 2$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$m + 1$		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x - m - 1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Vế trái		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [m + 1; 3]$.

TH2: $m + 1 > 3 \Leftrightarrow m > 2$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		$m + 1$		$+\infty$
$2x - 6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - m - 1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Vế trái		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; m + 1]$.

TH3: $m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$:

$(1) \Leftrightarrow (2x - 6)(x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 2(x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $S = \{3\}$.

Kết luận: + $m < 2$: $S = [m + 1; 3]$.

+ $m = 2$: $S = \{3\}$.

+ $m > 2$: $S = [3; m + 1]$.

4. a) $\begin{cases} (x-2)(6-x) \geq 0 \\ \dfrac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$.

Ta có: $(x - 2)(6 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$.

$$\frac{4x-3}{2} < x+3 \Leftrightarrow 4x - 3 < 2x + 6 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}.$$

Do đó hệ có nghiệm là $2 \leqslant x < \dfrac{9}{2}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-1} \leqslant \dfrac{1}{3-x}. \\ |x| < 1 \end{cases}$

Ta có:

$$* \ \frac{2}{2x-1} \leqslant \frac{1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{6-2x-2x+1}{(2x-1)(3-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{7-4x}{(2x-1)(3-x)} \leqslant 0 \ (1).$$

Lập bảng xét dấu ta có (1) có nghiệm là $x < \dfrac{1}{2} \vee \dfrac{7}{4} \leqslant x < 3$.

* $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Kết hợp nghiệm ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-1 < x < \dfrac{1}{2}$

5. a) $\begin{cases} (x-1)(4-x) > 0 & (1) \\ x - m + 1 \leqslant 0 & (2) \end{cases}$ (I).

* Giải (1) ta được $S_1 = (1; 4)$.

* Giải (2) ta được $S_2 = (-\infty; m - 1]$.

Gọi S là tập nghiệm của hệ (I), ta có $S = S_1 \cap S_2$.

TH1: $m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$ thì $S = \varnothing$.

TH2: $1 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 5$ thì $S = (1; m - 1]$.

TH3: $m - 1 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 5$ thì $S = (1; 4)$.

Kết luận: + $m \leq 2$: $S = \varnothing$.

+ $2 < m < 5$: $S = (1; m - 1]$.

+ $m \geq 5$: $S = (1; 4)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{1-x} > \dfrac{5}{4-2x} & (1) \\ x-m-1 \geq 0 & (2) \end{cases}$ (II)

* Giải (1) ta được $S_1 = (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

* Giải (2) ta được $S_2 = [m + 1; +\infty)$.

TH1: $m + 1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -4$ thì $S = S_1$.

TH2: $-3 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow -4 < m < 0$ thì $S = [m + 1; 1) \cup (2; +\infty)$.

TH3: $1 \leq m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$ thì $S = (2; +\infty)$.

TH4: $m + 1 > 2 \Leftrightarrow m > 1$ thì $S = [m + 1; +\infty)$.

Kết luận: $+ m \leq -4$: $S = (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

$+ -4 < m < 0$: $S = [m + 1; 1) \cup (2; +\infty)$.

$+ 0 \leq m \leq 1$: $S = (2; +\infty)$.

$+ m > 1$: $S = [m + 1; +\infty)$.

6. Ta có hàm số xác định $\Leftrightarrow (m - 1)x - m + 2 \geq 0$ (1)

TH1: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$: (1) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{m-2}{m-1} = \alpha$. Suy ra tập xác định $D = [\alpha; +\infty)$.

Do đó: f xác định với mọi $x \in [0; 2]$

$\Leftrightarrow [0; 2] \subset D \Leftrightarrow \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m-1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$.

TH2: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$: (1) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{m-2}{m-1} = \alpha$. Suy ra tập xác định $D = (-\infty; \alpha]$.

Do đó: f xác định với mọi $x \in [0; 2]$

$\Leftrightarrow [0; 2] \subset D \Leftrightarrow \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m-1} \geq 2 \Leftrightarrow m - 2 \leq 2m - 2 \Leftrightarrow 0 \leq m < 1$.

TH3: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (1) $\Leftrightarrow 0x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Suy ra $D = \mathbb{R}$.

Do đó f xác định trên $[0; 2] \Rightarrow m = 1$ nhận.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

***Vấn đề 1:* Xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

1. a) $x - 4y + 4 > 0$ (1)

* Vẽ đường thẳng

(d): $x - 4y + 4 = 0$.

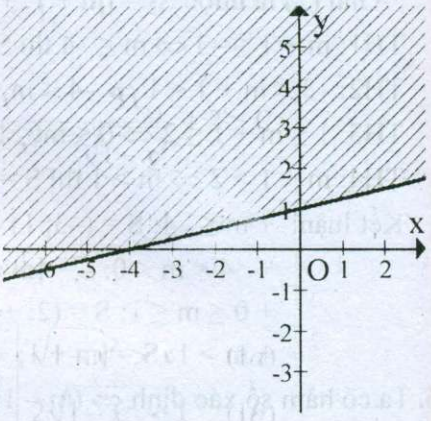
(d) là đường thẳng đi qua A(–4; 0) và B(0; 1).

* Xét điểm O(0; 0) không thuộc (d).

Ta có $P = 0 - 4.0 + 4 > 0$.

Vậy nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **chứa điểm O** là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

(Miền nghiệm của (1) là phần không gạch sọc trong hình vẽ bên)



b) $-2x + 3y + 6 \leqslant 0$ (2).

* Vẽ đường thẳng

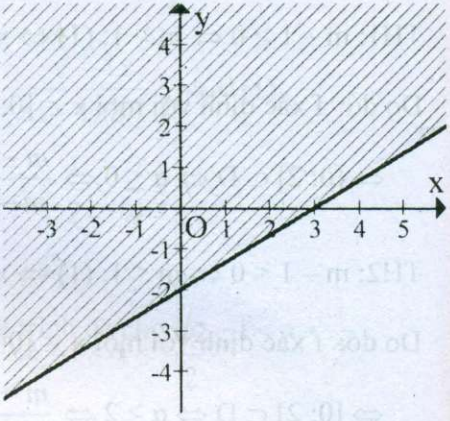
(d): $-2x + 3y + 6 = 0$.

(d) là đường thẳng đi qua A(3; 0) và B(0; –2).

* Xét điểm O(0; 0) không thuộc (d).

Ta có $P = -2.0 + 3.0 + 6 > 0$.

Vậy nửa mặt phẳng bờ (d) **không chứa điểm O** là miền nghiệm của bất phương trình (2) đã cho.



2.

a) $2x - y + 2 > 0$ (1)

* Vẽ đường thẳng

(d): $2x - y + 2 = 0$.

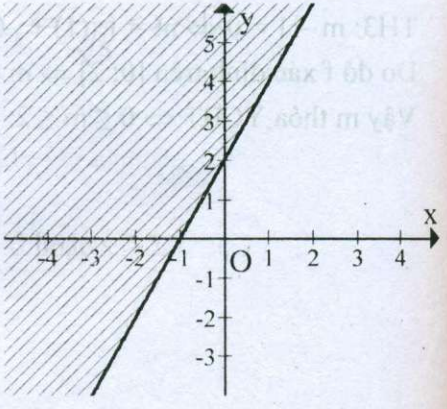
(d) là đường thẳng qua A(–1; 0) và B(0; 2).

* Xét điểm O(0, 0) không thuộc (d).

Ta có $P = 2.0 - 0 + 2 > 0$.

Vậy nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **chứa điểm O** là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

(Miền nghiệm của (1) là phần không gạch sọc trong hình vẽ bên)



b) $-2x + y \geq 0$ (2)

* Vẽ đường thẳng

(d): $-2x + y = 0$.

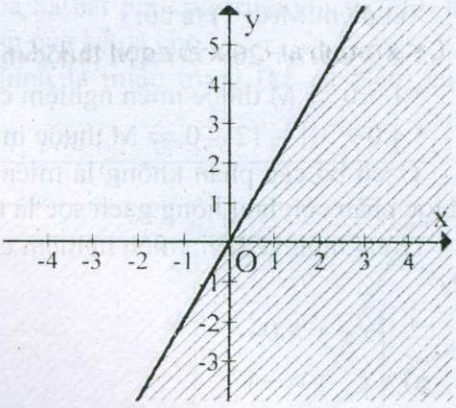
(d) là đường thẳng qua O(0; 0) và B(1; 2).

* Xét điểm M(1; –1) không thuộc (d).

Ta có $P = -2.1 - 1 = -3 < 0$.

Vậy nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **không chứa điểm O** là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

(Miền nghiệm của (2) là phần không gạch sọc trong hình vẽ bên)



Vấn đề 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 \leq 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 \leq 0 \ (1) \\ x - 2y - 2 \leq 0 \quad (2) \end{cases}$ (I)

Vẽ các đường thẳng

(d_1): $3x + 2y - 6 = 0$;

(d_2): $x - 2y - 2 = 0$.

Xét điểm O(0; 0) ta có:

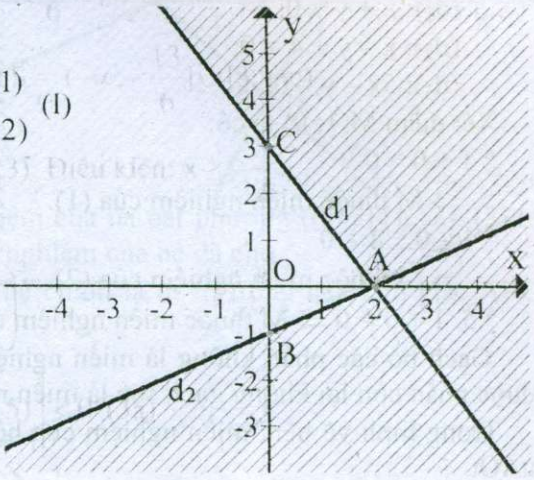
* $3.0 + 2.0 - 6 < 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (1).

* $0 - 2.0 - 2 < 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (2).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của hai bất phương trình (1), (2) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.



Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong (kể cả biên) của góc.

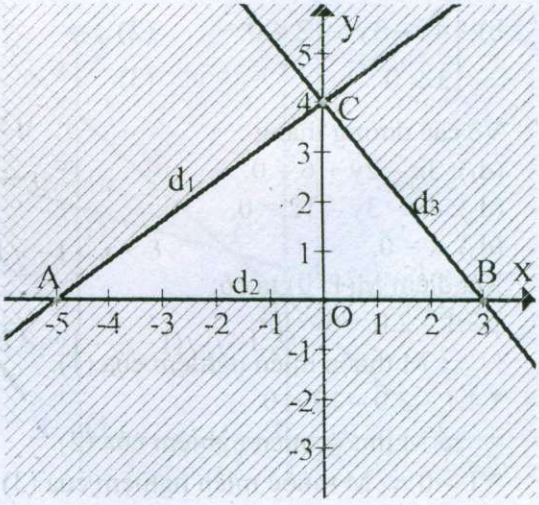
b) $\begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 & (1) \\ y > 0 & (2) \\ 4x + 3y - 12 < 0 & (3) \end{cases}$ (II).

Vẽ các đường thẳng

(d_1): $4x + 5y + 20 = 0$.

(d_2): $y = 0$;

(d_3): $x - 3y - 18 = 0$.



Xét điểm M(0; 1) ta có:

* $4.0 + 5.1 + 20 > 0 \Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (1).

* $1 > 0 \Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (2).

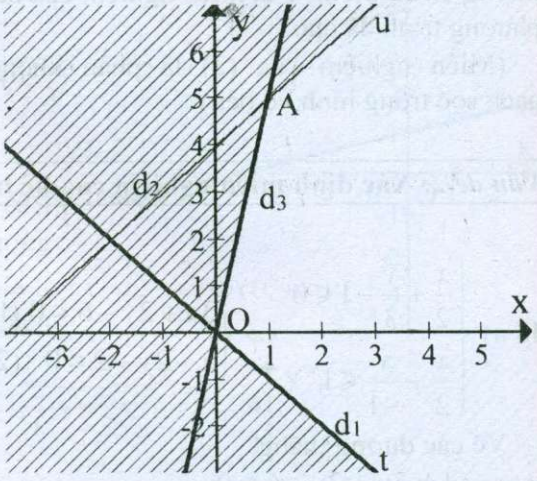
* $4.0 + 3.1 - 12 < 0 \Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (3).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của ba bất phương trình (1), (2), (3) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong của tam giác ABC.

2.

a) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > -4 \\ 5x - y > 0 \end{cases}$



Vẽ các đường thẳng

(d_1): $x + y = 0$;

(d_2): $x - y + 4 = 0$;

(d_3): $5x - y = 0$.

Xét điểm M(1; 0) ta có:

* $1 + 0 > 0$

$\Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (1).

* $1 - .0 + 4 > 0$

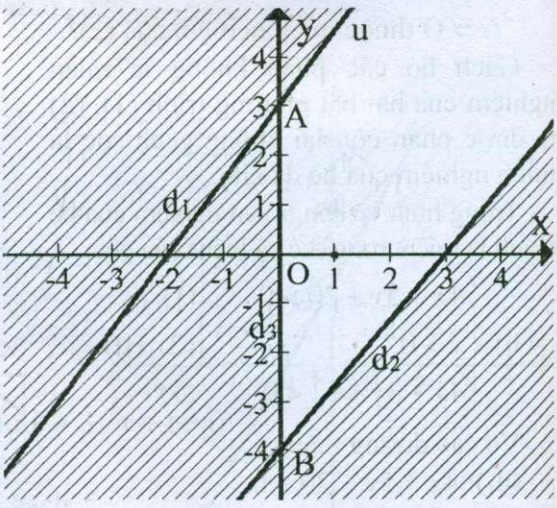
$\Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (2).

* $5.1 + 0 > 0 \Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (3).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của ba bất phương trình (1), (2), (3) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong của đường gấp khúc uAOt.

b) $\begin{cases} 3x - 2y + 6 \geqslant 0 & (1) \\ 4x - 3y - 12 \leqslant 0 & (2). \\ x \geqslant 0 & (3) \end{cases}$



Vẽ các đường thẳng

(d_1): $3x - 2y + 6 = 0$.

(d_2): $4x - 3y - 12 = 0$.

(d_3): $x = 0$.

Xét điểm M(1; 0) ta có:

* $3.1 - 2.0 + 6 > 0$

$\Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (1).

* $4.1 - 3.0 - 12 < 0$

$\Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (2).

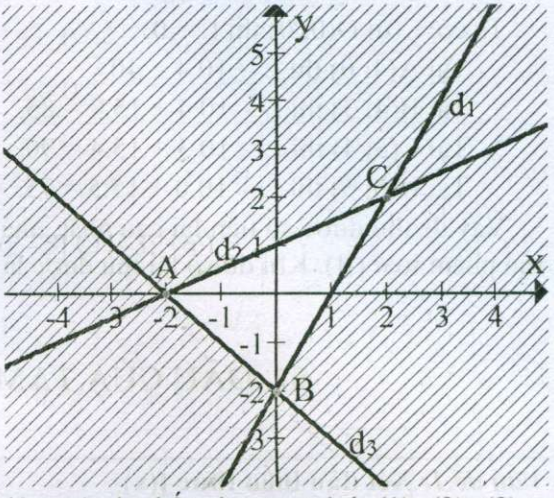
* $1 > 0 \Rightarrow$ M thuộc miền nghiệm của (3).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của ba bất phương trình (1), (2), (3) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong (kể cả biên) của đường gấp khúc uABt.

***Vấn đề 3:* Áp dụng vào bài toán kinh tế**

1.



a) Vẽ các đường thẳng

(d_1): $2x - y - 2 = 0$.

(d_2): $x - 2y + 2 = 0$.

(d_3): $x + y + 2 = 0$.

Xét điểm O(0; 0) ta có:

* $2.0 - 0 - 2 < 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (1).

* $0 - 2.0 + 2 > 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (2).

* $0 + 0 + 2 > 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (3).

Gạch bỏ các phần không là miền nghiệm của ba bất phương trình (1), (2), (3) ta được phần còn lại không gạch sọc là miền nghiệm của hệ đã cho.

Trong hình vẽ bên, miền nghiệm của hệ chính là miền trong của tam giác ABC trong đó A(–2; 0), B(0; –2) và C(2; 2).

b) Ta có: Tại A(–2; 0) thì F = –4;

Tại B(0; –2) thì F = –6;

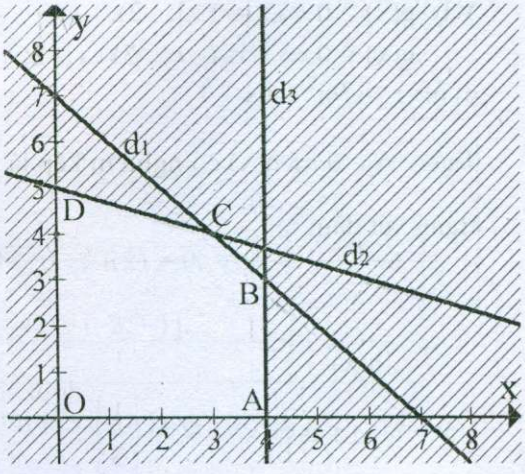
Tại C(2; 2) thì F = 2.2 + 3.2 = 10.

Vậy GTNN của F là –6, đạt tại x = 0, y = –2.

2. Gọi x là số sản phẩm loại I, y là số sản phẩm loại II mà nhà máy sản xuất ra.

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 7 & (1) \\ x + 3y \leqslant 15 & (2)\ (x, y \in \mathbb{N}) \\ 2y \leqslant 8 & (3) \end{cases}$$



Xác định miền nghiệm của hệ trên:

Vẽ các đường thẳng

(d_1): $x + y - 7 = 0$.

(d_2): $x + 3y - 15 = 0$.

(d_3): $2y - 8 = 0$.

Xét điểm O(0; 0) ta có:

* $0 + 0 - 7 < 0$

$\Rightarrow$ O thuộc miền nghiệm của (1).

* $0 + 3.0 - 15 < 0 \Rightarrow O$ thuộc miền nghiệm của (2).

* $2.0 - 4 < 0 \Rightarrow O$ thuộc miền nghiệm của (3).

Kết hợp với điều kiện $x, y \geq 0$ nên ta có miền nghiệm (S) của hệ đã cho, đó chính là ngũ giác OABCD kể cả các điểm trên cạnh.

Số tiền lãi thu được khi sản xuất x sản phẩm loại (I) và y sản phẩm loại (II) là:

$L = 10x + 15y$ (nghìn đồng).

Ta có: Tại $O(0; 0)$ thì $L = 0$.

Tại $A(4; 0)$ thì $L = 10.4 = 40$.

Tại $B(4; 3)$ thì $L = 10.4 + 15.3 = 85$.

Tại $C(3; 4)$ thì $L = 10.3 + 15.4 = 90$.

Tại $D(0; 5)$ thì $L = 10.0 + 15.5 = 75$.

Vậy để thu được số tiền lại cao nhất, nhà máy cần sản xuất 3 sản phẩm loại (I) và 4 sản phẩm loại (II). Khi đó số lãi thu được là 90 nghìn đồng.

§7. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Vấn đề 1: Xét dấu biểu thức f(x)

1. a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

Ta có: $\Delta' = -1 < 0$ và $a = 2 > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -x^2 - 5x - 6$.

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4.(-1).(-6) = 1 \Rightarrow g(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -3, x_2 = -2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
g(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2)$.

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$.

c) $h(x) = -9x^2 + 6x - 1$

Ta có: $\Delta = 0 \Rightarrow h(x)$ có nghiệm kép là $x = \frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
h(x)		$-$	0	$-$	

Vậy $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

d) $k(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$.

Ta có: $\Delta = 0 \Rightarrow k(x)$ có nghiệm kép là $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
k(x)		+	0	+	

Vậy $k(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. a) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

Ta có: $\Delta = 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -3 - 2\sqrt{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-3-2\sqrt{2}$		1		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3-2\sqrt{2}\,;\,1)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3-2\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$.

b) $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$

Ta có: $\Delta = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt{5}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{5}\,;\,1)$.

c) $f(x) = x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}$

Ta có: $\Delta = -2\sqrt{7} - 4\sqrt{3} + 8 < 0$ mà $a = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x$.

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x - 1$

Ta có: $\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

3.

a) $f(x) = \dfrac{(x-7)(x^2+x-2)}{2x^2-x+3}$

* $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$;
* $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$;
* $2x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		7		$-\infty$
$x - 7$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x^2 - x + 3$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (7; +\infty)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 7)$.

b) $f(x) = \dfrac{(x^2+6x+9)(1-x^2)}{8-2x-x^2}$

* $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$;
* $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$;
* $8 - 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x = -4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		2		$+\infty$
$x^2 + 6x + 9$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$1 - x^2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$8 - 2x - x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
f(x)		$+$	||	$-$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (1; 2)$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{\sqrt{6}x^2 - 3x + \sqrt{2}}$

* $x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hay $x = 6$.

* $\sqrt{6}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$x^2 - 4x - 12$		+	0	−	0	+	
$\sqrt{6}x^2 - 3x + \sqrt{2}$		+	|	+	|	+	
f(x)		+	0	−	0	+	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 6)$.

d) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2 + 6x + 10)}{(x^2 - 4)(12 - x - x^2)}$

* $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

* $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$;

$x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

$12 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hay $x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-2		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$		−	|	−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$x^2 + 6x + 10$		+	|	+	|	+	|	+	|	+	|	+	
$x^2 - 4$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$12 - x - x^2$		−	0	+	|	+	|	+	|	+	0	−	
f(x)		+	‖	−	‖	+	0	−	‖	+	‖	−	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cup (2; 3)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -2) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Vấn đề 2: Điều kiện để tam thức f(x) không đổi dấu trên R

1. a) $f(x) = (m^2 + 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1$.

Ta có $a = m^2 + 2 > 0$ với mọi m nên:

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 + 2) < 0$

$\Leftrightarrow 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.

b) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$.

Ta có $a = 1 > 0$ nên

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 4(8m + 1) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow 0 < m < 28.$

2.

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2.$

Vì $a = -2 < 0$ nên:

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 + 2(m-2) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow 0 < m < 2.$

b) $f(x) = (m-4)x^2 - (m-1)x + 5 - 2m$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 4$:

Khi đó $f(x) = -3x - 3 < 0 \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow m = 4$ (loại).

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$:

Khi đó $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-1)^2 - 4(m-4)(-2m+5) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ 9m^2 - 54m + 81 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ 9(m-3)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

Vậy không có m nào thỏa YCBT.

3.

a) $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-2)x - 6$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

Khi đó $f(x) = 0x - 6 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2$ (nhận).

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$:

Ta có: $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 0 \\ (m-2)^2 + 6(m-2) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ (m-2)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 2.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$

b) $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 7.$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Khi đó $f(x) = 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow m = 1$ (loại).

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$:

Ta có: $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ (m+2)^2 - (m-1)(m-7) \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 12m-3\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m\leq \frac{1}{4}.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m\leq \frac{1}{4}$.

4. a) $f(x) = (m^2 + 3)x^2 + 2(m + 3)x + 1$

Vì $a = m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên:

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m + 3)^2 - (m^2 + 3) \leq 0$

$\Leftrightarrow 6m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m \leq 1$.

b) $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x - 2m + 8$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = -2$:

Khi đó $f(x) = 0x + 12 > 0 \ \forall x$ nên $m = -2$ (nhận).

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$:

Khi đó: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ (m+2)^2-(m+2)(-2m+8)\leqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ (m+2)(3m-6)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ -2\leqslant m\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 2.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

c) $f(x) = x^2 + (m - 2)x + 4m + 1$

Vì $a = 1 > 0$ nên:

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 - 4(4m + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 20m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 20.$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 20$.

5. a) $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + m + 2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow g(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$:

$g(x) = -2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = 1$ (loại)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$:

$$g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m^2-(m-1)(m+2)\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -m+2\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Vậy $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2$.

b) $f(x) = \dfrac{3x+m}{\sqrt{x^2-2(m+3)x+m^2+5m-10}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 5m - 10 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - (m^2 + 5m - 10) < 0$

$\Leftrightarrow m + 19 < 0 \Leftrightarrow m < -19$.

Vậy f(x) xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < -19$.

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Vấn đề 1: Giải bất phương trình bậc hai

1. $5x^2 - 4x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{6}{5}$ hoặc $x > 2$.

2. $-16x^2 + 40x - 25 > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (vì vế trái $\leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

3. $3x^2 - 4x + 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (Vì vế trái $> 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

4. $x^2 - x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 3$.

Vấn đề 2: Giải bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. $(6 - 2x)(x^2 + x - 30)(x^2 - 4x + 4) \leqslant 0$ (1)

Đặt $f(x) = (6 - 2x)(x^2 + x - 30)(x^2 - 4x + 4)$

$6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ hay $x = 5$.

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-6		2		3		5		$+\infty$
$6 - 2x$		+	|	+	|	+	0	−	|	−	
$x^2 + x - 30$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$x^2 - 4x + 4$		+	|	+	0	+	|	+	|	+	
f(x)		+	0	−	0	−	0	+	0	−	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-6; 3] \cup [5; +\infty)$.

2. $\dfrac{2x^2 + 7x - 7}{x^2 + 3x - 10} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x - 10} \leqslant 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hay $x = -1$;

$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ hay $x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		-3		-1		2		$+\infty$
x^2+4x+3		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$x^2+3x-10$		+	0	−	0	−	|	−	0	+	
f(x)		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-5; -3] \cup [-1; 2)$.

3. $x^2 + (x+1)^2 \leqslant \dfrac{15}{x^2+x+1} \Leftrightarrow 2x^2+2x+1 \leqslant \dfrac{15}{x^2+x+1}$.

Đặt $t = x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x$.

$(1) \Leftrightarrow 2t - 1 = \dfrac{15}{t} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 15 \leq 0 \Leftrightarrow t \leqslant -\dfrac{5}{2} \vee t \geqslant 3$

$\Leftrightarrow t \geq 3$ (do $t > 0$) $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hay $x \geq 1$.

4. $3x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3 \geqslant 0$.

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^3 + 2x^2 - 2x - 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(3x^2 + 5x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vấn đề 3: Giải hệ bất phương trình bậc hai

1. a) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 7 > 0 \\ (x^2 - x - 6)(x^2 - 3x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > \dfrac{7}{2} \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ (do $x^2 - 3x + 3 > 0, \forall x$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > \dfrac{7}{2} \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 3.$

b) $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \leqslant 0 & (a) \\ (4x^2 + 12x + 5)(1 - x^2) > 0 & (b) \end{cases}$

Ta có: $(a) \Leftrightarrow x < -2 \vee x > \dfrac{3}{4}$.

Tập nghiệm của (a) là $S_a = (-\infty; -2) \cup (\dfrac{3}{4}; +\infty)$.

Giải (b):

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x^2+12x+5$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$1-x^2$		−	|	−	0	+	|	+	0	−	
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Tập nghiệm của bất phương trình (b) là $S_b = (-\frac{5}{2}; -1) \cup (-\frac{1}{2}; 1)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_a \cap S_b = \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

c) $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 & (a) \\ 2x^2 + 11x + 9 < 0 & (b)\ (*) \\ x^3 + x^2 + 2x + 2 > 0 & (c) \end{cases}$

Ta có: (a) $\Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 1$.

(b) $\Leftrightarrow x < -\frac{9}{2} \vee x > -1$.

(c) $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow x \geq 1$. Vậy $S = [1; +\infty)$.

d) $-3 \leq \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} < 3$

$\Leftrightarrow -3(x^2 + x + 1) \leq x^2 - 3x - 1 < 3(x^2 + x + 1)$ (do $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 6x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$ hay $x > -1$. Vậy $S = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

2.

a) $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 \leq x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{bmatrix}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-3; -1] \cup [1; 3]$.

b) $y = \sqrt{\frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 3x + 2}}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$-x^2 + 5x - 4$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
f(x)		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \{1\} \cup [2; 4]$.

Vấn đề 4: Giải và biện luận bất phương trình bậc hai

1. a) $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 3m^2 - 4m + 9 < 0$ (1)

Ta có: $a = 1 > 0$ và $\Delta' = (2m-3)^2 - (3m^2 - 4m + 9) = m^2 - 8m$.

Bảng xét dấu Δ':

m	$-\infty$		0		8		$+\infty$
Δ'		+	0	–	0	+	

▸ $0 \le m \le 8$: $f(x) \ge 0$, $\forall x$ nên (1) vô nghiệm.

Gọi $x_1 = 2m - 3 - \sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = 2m - 3 + \sqrt{\Delta'}$.

▸ $m < 0$ hoặc $m > 8$: $(1) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

Kết luận: * $0 \le m \le 8$: $S = \varnothing$.

* $m < 0$ hoặc $m > 8$: $S = (x_1; x_2)$.

b) $x^2 - (m+3)x + m^2 + 3m > 0$ (2)

Ta có: $a = 1 > 0$ và $\Delta = (m+3)^2 - 4(m^2 + 3m) = -3m^2 - 6m + 9$.

Bảng xét dấu Δ':

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Δ'		–	0	+	0	–	

▸ $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$: $f(x) \le 0$, $\forall x$ nên $(2) \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Gọi $x_1 = \dfrac{m+3-\sqrt{\Delta}}{2}$ và $x_2 = \dfrac{m+3+\sqrt{\Delta}}{2}$.

▸ $-3 < m < 1$: $(2) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ hoặc $x > x_2$

Kết luận: * $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$: $S = \varnothing$.

* $-3 < m < 1$: $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

c) $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-3)x + m - 5 \ge 0$ (3)

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$:

$(3) \Leftrightarrow -4x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$.

TH2: $a \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 1$:

Ta có: $\Delta' = (m-3)^2 - (m-1)(m-5) = 4 > 0$

$\Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{-m+3-2}{m-1} = -1$ hay $x_2 = \dfrac{-m+3+2}{m-1} = \dfrac{5-m}{m-1}$.

* $a > 0 \Leftrightarrow m > 1$: $x_1 < x_2$ và $(3) \Leftrightarrow x \le x_1$ hoặc $x \ge x_2$.

* $a < 0 \Leftrightarrow m < 1$: $x_1 > x_2$ và $(3) \Leftrightarrow x_2 \le x \le x_1$.

Kết luận: + $m = 1$: $S = (-\infty; -1]$.

+ $m > 1$: $S = (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

+ $m < 1$: $S = [x_2; x_1]$.

d) $f(x) = (m+1)x^2 + 2mx + m + 3 \le 0$ (4)

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$:

$(3) \Leftrightarrow -2x + 2 \le 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$:

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m+1)(m+3) = -4m - 3$

Bảng xét dấu a và Δ':

m	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
a		$-$	0	$+$	|	$+$	
Δ'		$+$	|	$+$	0	$-$	

Gọi $x_1 = \dfrac{-m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$; $x_2 = \dfrac{-m+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$ là hai nghiệm nếu có của f(x).

Biện luận:

- $m < -1$: $a < 0$ và $\Delta' > 0 \Rightarrow$ f(x) có hai nghiệm là x_2; x_1 ($x_2 < x_1$).

  Do đó (4) $\Leftrightarrow x \leq x_2$ hay $x \geq x_1$. Vậy $S = (-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$.

- $-1 < m < -\dfrac{3}{4}$: $a > 0$ và $\Delta' > 0 \Rightarrow$ f(x) có hai nghiệm x_1; x_2 ($x_1 < x_2$).

  Do đó (4) $\Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$. Vậy $S = [x_1; x_2]$.

- $m = -\dfrac{3}{4}$: $a > 0$ và $\Delta' = 0 \Rightarrow$ f(x) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 3$.

  Do đó (4) $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $S = \{3\}$.

- $m > -\dfrac{3}{4}$: $a > 0$ và $\Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

  Do đó (4) $\Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$. Vậy $S = \varnothing$.

Kết luận:

* $m < -1$: $S = (-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$.

* $m = -1$: $S = [1; +\infty)$.

* $-1 < m < -\dfrac{3}{4}$: $S = [x_1; x_2]$.

* $m = -\dfrac{3}{4}$: $S = \{3\}$.

* $m > -\dfrac{3}{4}$: $S = \varnothing$.

2. a) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 > 0$ (1)

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$: (1) $\Leftrightarrow 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thỏa.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$:

(1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ (m+1)^2-(m-1)(3m-6)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -2m^2+11m-5<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m<\frac{1}{2} \vee m>5 \end{cases} \Leftrightarrow m>5.$$

Kết luận: (1) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 5$.

b) $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0$ vô nghiệm.

$\Leftrightarrow f(x) = mx^2 + 6mx + 8m - 10 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$: $f(x) = -10 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ thỏa.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$:

Ta có: $f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2+10m<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<-10 \vee m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-10.$$

Kết luận: m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m < -10$.

c) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 < 0$ (*) có nghiệm.

Ta có:

(*) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$:

$$f(x) = 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \Rightarrow m = -1 \text{ không thỏa.}$$

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$:

$$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ (m-1)^2-(m+1)(2m-3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -m^2-m+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m \leq -2 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 1$.

Do đó (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m < 1$.

d) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0$ (I) có nghiệm.

Ta có:

(I) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$:

$$f(x) = 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4} \Rightarrow m = -1 \text{ không thỏa.}$$

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$:

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2m^2 - 2m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -2 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Vậy (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow m < -2$.

Do đó (I) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -2$.

3. $-1 \leq \dfrac{x^2 - 5x + m}{2x^2 + 3x + 2} < 7$ (1)

Ta có: $2x^2 + 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó:

$(1) \Leftrightarrow -(2x^2 + 3x + 2) \leq x^2 - 5x + m < 7(2x^2 + 3x + 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x + m + 2 \geq 0 & (a) \\ 13x^2 + 26x - m + 14 > 0 & (b) \end{cases}$$

(1) thỏa với mọi $x \Leftrightarrow$ (a) và (b) cùng thỏa với mọi x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_a \leq 0 \\ \Delta'_b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3(m+2) \leq 0 \\ 13^2 - 13(14 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{5}{3} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m < 1.$$

4. a) $\left|\dfrac{3x^2 + 2x + 12}{x^2 - mx + 4}\right| \geq 2$ (1)

Ta có: $3x^2 + 2x + 12 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(1) có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Rightarrow x^2 - mx + 4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 16$.

Khi đó: $x^2 - mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 12 \geq 2(x^2 - mx + 4)$

$\Leftrightarrow x^2 + (2m + 2)x + 4 \geq 0$ (2).

(1) thỏa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (2) thỏa mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq 2m + 2 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$ (nhận).

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

b) hàm số $y = \dfrac{3}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 8 + 9m}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 + 2mx + 8 + 9m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$:

Khi đó $g(x) = 8 > 0, \forall x \Rightarrow m = 0$ thỏa YCBT.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$:

Khi đó $g(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m(-8-8m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m \geq 0$.

5. Đặt $f(x) = 3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5$. Ta có:

$f(x) = 3x^2 - (8y + 4)x + 9y^2 - 2y + 5$ có:

$\Delta' = (4y + 2)^2 - 3(9y^2 - 2y + 5)$

$= -11y^2 + 22y - 11 = -11(y - 1)^2 \leq 0, \forall y$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi x, y.

Vậy (1) đúng với mọi x, y.

§9. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

Vấn đề 1: **Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối**

1. a) $\left|x^2 + 5x + 4\right| = x^2 - 5x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 4 = x^2 - 5x - 6 \\ x^2 + 5x + 4 = -x^2 + 5x + 6 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 10x = -10 \\ 2x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

b) $\left|x + 2\right| = 2x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + 2 = 2x + 10 \\ x + 2 = -2x - 10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$

c) $\left|\dfrac{x^2 - 2}{x - 1}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 2(x - 1) \\ x^2 - 2 = -2(x - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$

d) $\left|x^2 - 2x + 3\right| = \left|x + 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 = x + 1 \\ x^2 - 2x + 3 = -x - 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2-x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

e) $\left|x^2+x-3\right| = x^2+3x+5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+3x+5 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-3 = x^2+3x+5 \\ x^2+x-3 = -x^2-3x-5 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x=8 \\ 2x^2+4x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

f) $\left|x^2-4x-5\right|+4x=24 \Leftrightarrow \left|x^2-4x-12\right| = -4x+24$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x+24 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x-12 = 4x-24 \\ x^2-4x-12 = -4x+24 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 6 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-8x+12=0 \\ x^2=36 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \vee x=6 \\ x=\pm 6 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ x = –6 hoặc x = 2 hoặc x = 6.

g) $x^2-5\left|x-1\right|-1=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1 \geqslant 0 \\ x^2-5(x-1)-1=0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x-1<0 \\ x^2+5(x-1)-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ x^2+5x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x=1 \vee x=4 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ x=1 \vee x=-6 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = 4 hoặc x = –6.

h) $\left|x^2-3\left|x\right|+2\right| = x^2-2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3\left|x\right|+2 = x^2-2x \\ x^2-3\left|x\right|+2 = -x^2+2x \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x+2 = x^2-2x \\ x^2+3x+2 = -x^2+2x \end{array}\right. \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2 = x^2-2x \\ x^2-3x+2 = -x^2+2x \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5x+2=0 \\ 2x^2+x+2=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} -x+2=0 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ hoặc } x = 2.$$

2. a) $\dfrac{\left|x^2-1\right|+\left|x-2\right|}{x+\left|x-1\right|} = 1 \Leftrightarrow |x^2-1| + |x-2| = x + |x-1|$ (1)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	0	+	
$x-1$		−	|	−	0	+	|	+	

* $x < -1$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 1 - x + 2 = x - (x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hay $x = 1$ (loại)

* $-1 \le x < 1$:

(1) $\Leftrightarrow -x^2 + 1 - x + 2 = x - x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại) hoặc $x = -2$ (loại).

* $1 \le x < 2$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 1 - x + 2 = x + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (nhận) $x = 2$ (loại)

* $x \ge 2$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 1 + x - 2 = x + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ (nhận) hoặc $x = -1$ (loại)

Kết luận: (1) có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

b) $\dfrac{|8-4x|-|x|}{|2+2x|+x-2} = 1$ (2)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$4-2x$		+	|	+	|	+	0	−	
x		−	|	−	0	+	|	+	
$2x+2$		−	0	+	|	+	|	+	

* $x < -1$:

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{8-4x+x}{-2-2x+x-2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8-3x}{-x-4} = 1$

$\Leftrightarrow 8 - 3x = -x - 4 \Leftrightarrow x = 6$ (loại).

* $-1 \le x < 0$:

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{8-4x+x}{2+2x+x-2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8-3x}{3x} = 1 \Leftrightarrow 8 - 3x = 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ (loại)

* $0 \le x < 2$:

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{8-4x-x}{2+2x+x-2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8-5x}{3x} = 1 \Leftrightarrow 8 - 5x = 3x \Leftrightarrow x = 1$ (nhận)

* $x \ge 2$:

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{4x-8-x}{2+2x+x-2} = 1 \Leftrightarrow 3x - 8 = 3x \Leftrightarrow x = \varnothing$.

Vậy phương trình (2) có một nghiệm là $x = 1$.

c) $\dfrac{|x^2-1|+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$ (3) Điều kiện: $x\neq 0$ và $x\neq 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	|	−	0	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
x		−	|	−	0	+	|	+	

* $x<-1$:

$$(3)\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x-1}{-x(x-2)}=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=-2x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (loại) hoặc } x=-\frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

* $-1\leq x<0$:

$$(3)\Leftrightarrow \frac{-x^2+1+x+1}{-x(x-2)}=2 \Leftrightarrow -x^2+x+2=-2x(x-2)$$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ (loại) hay $x=2$ (loại).

* $0<x<1$:

$$(3)\Leftrightarrow \frac{-x^2+1+x+1}{x(x-2)}=2 \Leftrightarrow -x^2+x+2=2x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (loại) hoặc } x=-\frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

* $1\leq x\neq 2$:

$$(3)\Leftrightarrow \frac{x^2-1+x+1}{x(x-2)}=2 \Leftrightarrow x^2+x=2x(x-2)$$

$\Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow x=0$ (loại) hoặc $x=5$ (nhận).

Vậy phương trình (3) có một nghiệm là $x=5$.

d) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}+\dfrac{|2x-4|}{|x-1|}-3=0\Leftrightarrow \left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2+2\left|\dfrac{x-2}{x}\right|-3=0$ (4)

Đặt $t=\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>0$.

(4)$\Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ (nhận) hay $t=-3$ (loại)

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-2}{x}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=x \\ x-2=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy (4) có nghiệm là $x=1$.

e) $\left|x^2-5|x|+4\right|=\left|2x^2-3|x|+1\right|$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5|x|+4=2x^2-3|x|+1 \\ x^2-5|x|+4=-2x^2+3|x|-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2|x|-3=0 \\ 3x^2-8|x|+5=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=1 \\ |x|=-3 \\ |x|=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ hay } x=\pm\frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$ hay $x=\pm\frac{5}{3}$.

f) $\dfrac{|x^2-1|}{|x-2|}=x+|x-2|-2$ (5)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	0	+	

* $x<-1$ hay $1\le x<2$:

(5) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2-x}=x+2-x-2 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (loại) hay $x=1$ (nhận)

* $-1\le x<1$:

(5) $\Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2-x}=x+2-x-2 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ (nhận) hay $x=1$ (loại).

* $x>2$:

(5) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x-2}=x+x-2-2 \Leftrightarrow x^2-1=2(x-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-8x+9=0 \Leftrightarrow x=4-\sqrt{7}$ (loại) hay $x=4+\sqrt{7}$ (nhận).

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x=\pm 1$ hoặc $x=4+\sqrt{7}$.

g) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$ (6)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		−	0	+	|	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	0	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	|	−	0	+	

* $x < 1$:

(6) $\Leftrightarrow -x + 1 + 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

* $1 \le x < 2$:

(6) $\Leftrightarrow x - 1 + 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow 1 \le x < 2$.

* $2 \le x < 3$:

(6) $\Leftrightarrow x - 1 - 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

* $x \ge 3$:

(6) $\Leftrightarrow x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) = 4 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận).

Vậy tập nghiệm của (6) là $S = [1; 2] \cup \{5\}$.

h) $\left|x^2 - |x-1|\right| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - |x-1| = x + 1 \\ x^2 - |x-1| = -x - 1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = x + 1 \\ x^2 + x - 1 = -x - 1 \end{array}\right. \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = x + 1 \\ x^2 - x + 1 = -x - 1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \vee x = -2 \end{array}\right. \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \vee x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

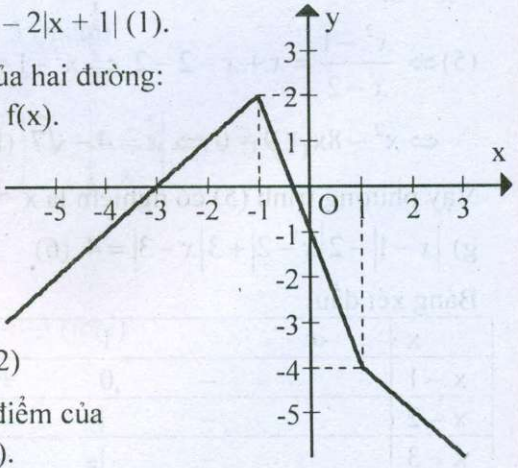
3.

a) $\left|x - 2\right| - 2\left|x + 1\right| - m = 0 \Leftrightarrow m = |x - 2| - 2|x + 1|$ (1).

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

(d): $y = m$ và (C): $y = |x - 2| - 2|x + 1| = f(x)$.

Ta có đồ thị (C) có dạng sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có:

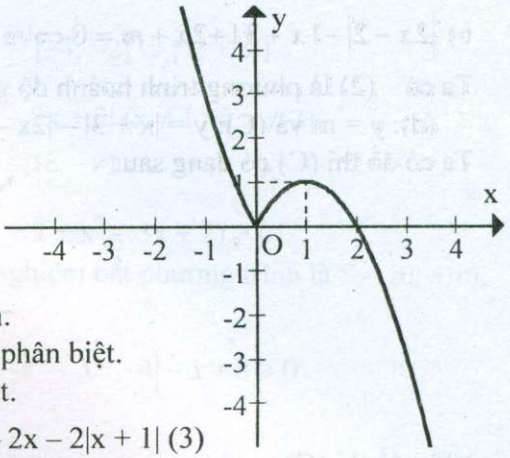
* $m < 2$: (1) có hai nghiệm phân biệt.
* $m = 2$: (1) có một nghiệm duy nhất.
* $m > 2$: (1) vô nghiệm.

b) $(x - 1)\left|x\right| + m = 0 \Leftrightarrow m = -|x|(x - 1)$ (2)

Ta có (2) là phương trình hoành độ giao điểm của

(d): $y = m$ và (C): $y = -|x|(x - 1) = f(x)$.

Ta có đồ thị (C) có dạng sau:



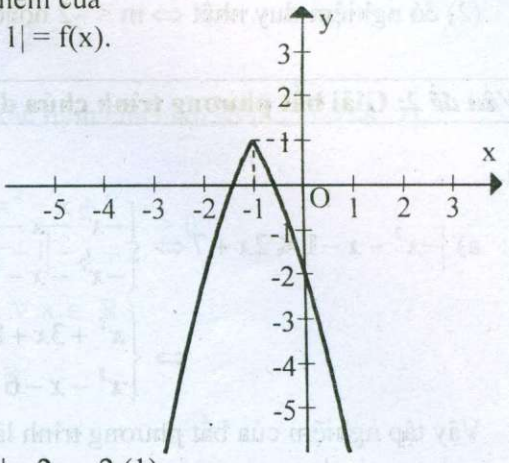
Nhìn đồ thị (C) ta có:

* $m < 0$ hoặc $m > 1$: (2) có một nghiệm.
* $m = 0$ hoặc $m = 1$: (2) có hai nghiệm phân biệt.
* $0 < m < 1$: (2) có ba nghiệm phân biệt.

c) $x^2 + 2x + 2|x+1| + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - 2x - 2|x+1|$ (3)

Ta có (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (d): $y = m$ và (C): $y = -x^2 - 2x - 2|x+1| = f(x)$.

Ta có đồ thị (C) có dạng sau:



Nhìn đồ thị (C) ta có:

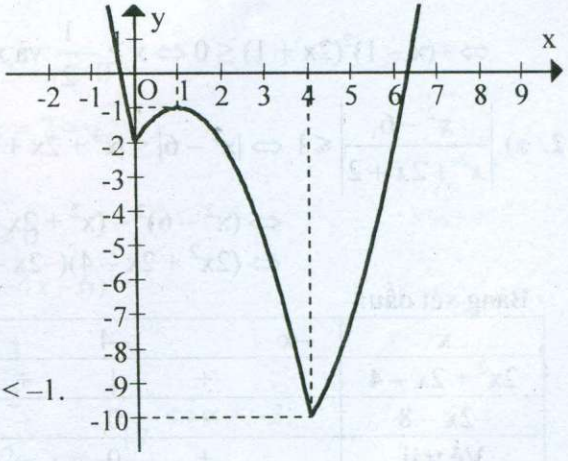
* $m > 1$: (3) vô nghiệm.
* $m = 1$: (3) có một nghiệm.
* $m < 1$: (3) có hai nghiệm phân biệt.

4.

a) $|x^2 - 4x| = 2x + 2 + m \Leftrightarrow m = |x^2 - 4x| - 2x - 2$ (1)

Ta có (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (d): $y = m$ và (C): $y = |x^2 - 4x| - 2x - 2 = f(x)$.

Ta có đồ thị (C) có dạng sau:



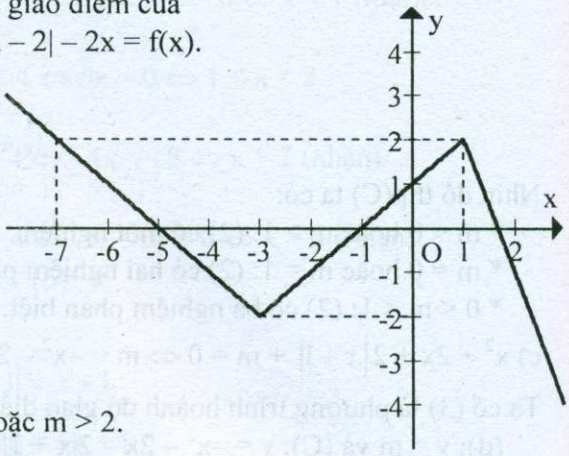
Nhìn đồ thị (C) ta có:

(1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < -1$.

b) $|2x-2|-|x+3|+2x+m=0 \Leftrightarrow m = |x+3| - |2x-2| - 2x$ (2)

Ta có (2) là phương trình hoành độ giao điểm của (d): $y = m$ và (C): $y = |x+3| - |2x-2| - 2x = f(x)$.

Ta có đồ thị (C) có dạng sau:



Nhìn đồ thị (C) ta có:

(2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$.

Vấn đề 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1.

a) $\left|-x^2-x-1\right| \leqslant 2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-x-1 \leqslant 2x+7 \\ -x^2-x-1 \geqslant -2x-7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+8 \geqslant 0 \\ x^2-x-6 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 3]$.

b) $\left|x^2-x\right| \leqslant \left|x^2-1\right| \Leftrightarrow (x^2-x)^2 \leq (x^2-1)^2$

$\Leftrightarrow (x^2-x)^2 - (x^2-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-x^2+1)(x^2-x+x^2-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (-x+1)(2x^2-x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow -(x-1)^2(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 1$.

2. a) $\left|\frac{x^2-6}{x^2+2x+2}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |x^2-6| \leq |x^2+2x+2|$

$\Leftrightarrow (x^2-6)^2 - (x^2+2x+2)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (2x^2+2x-4)(-2x-8) \leq 0.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-2		1		$+\infty$
$2x^2+2x-4$		+	|	+	0	–	0	+	
$-2x-8$		+	0	–	|	–	|	–	
Vế trái		+	0	–	0	+	0	–	

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-4; -2] \cup [1; +\infty)$.

b) $\left|\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |x^2+3x+2| \geq |x^2-3x+2|$ ($x \neq 1$ và $x \neq 2$)

$\Leftrightarrow (x^2+3x+2)^2 \geq (x^2-3x+2)^2$

$\Leftrightarrow (x^2+3x+2-x^2+3x-2)(x^2+3x+2+x^2-3x+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 6x(2x^2+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = [0; +\infty)$.

3.

a) $y = \sqrt{\left|x^2+3x-4\right|-x+8}$ xác định $\Leftrightarrow \left|x^2+3x-4\right|-x+8 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow |x^2+3x-4| \geq x-8$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4 \geqslant x-8 \\ x^2+3x-4 \leqslant -x+8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+4 \geqslant 0 \\ x^2+4x-12 \leqslant 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ -6 \leqslant x \leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-6; 2]$.

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{\left|2x-1\right|-x+2}}$ xác định $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{\left|2x-1\right|-x+2} \geq 0$

$\Leftrightarrow |2x-1|-x+2 > 0$ (vì $x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 > x-2 \\ 2x-1 < -x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1 \\ x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Vấn đề 3: Giải phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1.

a) $\sqrt{1-4x} = \sqrt{7+\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 7+\sqrt{2-x} \geqslant 0 \\ 1-4x = 7+\sqrt{2-x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ \sqrt{2-x} = -4x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ -4x-6 \geqslant 0 \\ 2-x = (-4x-6)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \leqslant -\dfrac{3}{2} \\ 16x^2+49x+34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{3}{2} \\ x = -2 \vee x = -\dfrac{17}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=\sqrt{3x+2}$ (1)

Điều kiện: $x \geq 0$.

Khi đó

(1) $\Leftrightarrow x+2+x+2\sqrt{x(x+2)}=3x+2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+2)}=x \Leftrightarrow 4x(x+2)=x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x+8=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{8}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

c) $\sqrt{2x^2+4x-2}=x+1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1 \geqslant 0 \\ 2x^2+4x-2=(x+1)^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ x^2+2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ x=1 \vee x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$

d) $\sqrt{4x^2+101x+64}=2(x+10) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+10 \geqslant 0 \\ 4x^2+101x+64=4(x+10)^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -10 \\ 21x=336 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -10 \\ x=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=16.$

e) $\sqrt{x^2+12x}=-2x^2-24x+136$ (2)

Đặt $t=\sqrt{x^2+12x} \geqslant 0$.

(2) $\Leftrightarrow t=-2t^2+136 \Leftrightarrow 2t^2+t-136=0$

$\Leftrightarrow t=8$ (nhận) hay $t=-\dfrac{17}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12x}=8 \Leftrightarrow x^2+12x-64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-16 \end{array}\right.$.

f) $\sqrt{(x+1)(x+2)}=x^2+3x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}=x^2+3x-4$ (3)

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x+2} \geq 0$. Ta được:

(3) $\Leftrightarrow t=t^2-6 \Leftrightarrow t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t=-2$ (loại) hay $t=3$ (loại).

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}=3 \Leftrightarrow x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow \dfrac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$.

2. a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x.$ (1)

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x-1)(x-2+\sqrt{3x-2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \sqrt{3x-2}=2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left\{\begin{array}{l} 2-x \geqslant 0 \\ 3x-2=4-4x+x^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 2 \\ x^2-7x+6=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

b) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (2)

Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0$. Ta được:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+9-6t} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1$

$\Leftrightarrow |t-2| + |t-3| = 1$

$\Leftrightarrow |t-2| + |3-t| = 1$ (2a)

Ta có: Vế trái (2a) $\geq |t-2+3-t| = 1$ = Vế phải (2a).

Do đó: (2a) $\Leftrightarrow (t-2)(3-t) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 10.$

Vậy (2) có tập nghiệm là S = [5; 10].

c) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x^2\sqrt{2}$ (3)

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$(3) \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = x^2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) = \sqrt{2} \end{array}\right. \quad (3a)$$

Ta có:

$$(3a) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x^2\left(1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}\right)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ 1-x^2-x^2\sqrt{1-x^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-x^2\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} 1-x^2=0 \\ \sqrt{1-x^2}=x^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ 1-x^2=x^4 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^4+x^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 0; x = 1; $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

d) $(x-2)(x+1)+(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=6$ (4). Điều kiện: $x \le -1$ hoặc $x > 2$.

Đặt $t=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} \Rightarrow t^2=(x-2)(x+1)$. Ta được:

(4) $\Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=-3$ hay $t=2$.

- $t=2 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (x-2)(x+1)=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

- $t=-3 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1 \\ (x-2)(x+1)=9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1 \\ x^2-x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình (4) có nghiệm là $x=3;\ x=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$.

e) $x^2+10x+24=(2x+8)\sqrt{x^2+9}$ (5)

Đặt $t=\sqrt{x^2+9} \ge 3. \Rightarrow x^2=t^2-9$. Do đó (5) trở thành:

$t^2-9+10x+24=(2x+8)t$

$\Leftrightarrow t^2-(2x+8)t+10x+15=0$ (5a)

(5a) có $\Delta'=(x+4)^2-(10x+15)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

Suy ra (5a) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x+4-x+1=5 \\ t=x+4+x-1=2x+3 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+9}=5 \\ \sqrt{x^2+9}=2x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9=25 \\ \begin{cases} 2x+3\geqslant 0 \\ x^2+9=4x^2+12x+9 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+12x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy (5) có nghiệm là x = 0; x = ± 4.

f) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$ (6)

Đặt $u=\sqrt{17-x^2}$, ta được $u^2+x^2=17$. Do đó:

$$(6)\Leftrightarrow \begin{cases} x+u+xu=9 \\ x^2+u^2=18 \end{cases} \quad (6a)$$

Đặt S = x + u và P = xu ($S^2 - 4P \geq 0$). Ta được:

$$(6a)\Leftrightarrow \begin{cases} S+P=9 \\ S^2-2P=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+2S-35=0 \\ P=9-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=4 \end{cases} \vee \begin{cases} S=-7 \\ P=16 \end{cases} \text{(loại)}$$

Do đó ta được

$$\begin{cases} x+u=5 \\ xu=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ u=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ u=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 4.$$

Vậy (6) có nghiệm là x = 1; x = 4.

g) $15x^2+8x\sqrt{16+x}=63(16+x)$ (7)

Đặt $t=\sqrt{1+x} \geq 0$ ($x \geq -1$). Ta được:

(7) $\Leftrightarrow 15x^2-8xt-63t^2=0$ (7a)

Ta có (7a) có $\Delta' = (4t)^2 + 15.63t^2 = 961t^2$

Suy ra (7a) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4t+31t}{15}=\dfrac{9t}{5} \\ x=\dfrac{-4t-31t}{15}=-\dfrac{7t}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9\sqrt{16+x}=5x \\ 7\sqrt{16+x}=-3x \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 81(x+16)=25x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 49(x+16)=9x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x=9 \vee x=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x=-7 \vee x=12\dfrac{4}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-7 \end{array}\right.$$

Vậy (7) có nghiệm là x = –7; x = 9.

h) $\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$ (8).

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-ski ta có:

Vế trái (8) $= 1.\sqrt{x-1}+1(x-3) \leqslant \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-3\right)^2}$

$= \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$ = Vế phải (8).

Do đó: (8) $\Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x-1}}{1}=\dfrac{x-3}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ x-1=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy (8) có nghiệm là x = 5.

i) $2\sqrt{2x-1}=x^2+1$ (9)

Đặt u = $\sqrt{2x-1} \geq 0$. Ta được:

$$\begin{cases} u^2=2x-1 \\ 2u=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-2x+1=0 \\ x^2-2u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-x^2-2x+2u=0 \\ x^2-2u+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-x)(u+x+2)=0 \\ x^2-2u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-x-2 \\ x^2-2(-x-2)+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=x \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-x-2 \\ x^2+2x+5=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy (9) có nghiệm là x = 1.

j) $x\sqrt{x-1}+2(x-1)=x^2$ (10)

Đặt u = $\sqrt{x-1} \geq 0$ ($x \leq 1$).

$$(10) \Leftrightarrow xu+2u^2=x^2 \Leftrightarrow 2u^2+xu-x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=-x \\ u=\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=-x \\ 2\sqrt{x-1}=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x-1=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4(x-1)=x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2-x+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy (10) có nghiệm là x = 4.

k) $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$ (11)

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 2+x+4(2-x)-4\sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow 4\sqrt{4-x^2} = 10-3x.$

Do đó:

(11) $\Leftrightarrow 3t + 10 - 3x = 10 - 3x \Leftrightarrow t = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2 + x = 4(2-x) \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}.$

Vậy (11) có nghiệm là $x = \frac{6}{5}$.

***Vấn đề 4:* Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn**

1.

a) $\sqrt{x^2+x-6} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-8 \geq 0 \\ x-2>0 \\ x^2-2x-8 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 4 \\ x>2 \\ 2x<12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x < 6.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = [4; 6).

b) $\sqrt{x-1} \leq x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x-1 \leq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 3 \\ x^2-7x+10 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \vee x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = [5; +∞).

c) $\sqrt{2x^2-1} > 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x<0 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x^2-1 > (1-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2+2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x<-2 \vee x>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 0<x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = (0; +∞).

d) $\sqrt{x^2-5x-14} \geq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x^2-5x-14 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-5x-14 \geq (x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\leqslant -2 \vee x\geqslant 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geqslant 1 \\ -3x\geqslant 15 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq -2$ hoặc $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x\leqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq -2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2]$.

2.

a) $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ (1). Điều kiện: $-1 < x < 1$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} - 1 - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ta được:

$$t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t<1 \\ t>2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} > x & (1a) \\ 2\sqrt{1-x^2} < x & (1b) \end{bmatrix}$$

Giải (1a): $(1a) \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 1-x^2>x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2 < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ hoặc } 0 \leqslant x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải (1b): $(1b) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ x>0 \\ 4(1-x^2)<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x^2 > \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$

Vậy (1) có nghiệm là $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$

b) $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leqslant x^2 - 9$ (2). Điều kiện: $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$.

Khi đó ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (x-3)\left[\sqrt{x^2-4} - x - 3\right] \leqslant 0 \quad (2a).$$

▸ $x > 3$: $(2a) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \leqslant x+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2 \\ 6x \geqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{13}{6} \leqslant x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$. Kết hợp với x > 3 ta được x > 3.

- x = 3 là một nghiệm của (2).
- x < 3: (2a) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \geqslant x+3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3<0 \\ x^2-4 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x^2-4 \geqslant (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \leqslant -\frac{13}{6} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x < –3 hoặc $-3 \leqslant x \leqslant -\frac{13}{6} \Leftrightarrow x \leq -\frac{13}{6}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\frac{13}{6}] \cup [3; +\infty)$.

c) $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$ (3). Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$.

Tạ có:

$$(3) \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < 2(x+5)\left(\frac{2x+2}{\sqrt{3+2x}+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2\left[\left(\sqrt{3+2x}+1\right)^2 - 2(x+5)\right] < 0 \quad (3a)$$

- x = –1 không thỏa (3a).
- $x \neq -1$:

$$(3a) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3+2x}+1\right)^2 - 2(x+5) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3+2x+1+2\sqrt{3+2x}-2x-10<0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x} < 3 \Leftrightarrow 3+2x<9 \Leftrightarrow x<3.$$

So sánh điều kiện ta được $-\frac{3}{2} \leqslant x < -1 \vee -1 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 3)$.

e) $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} < 3$ (4)

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} > 0$ (Điều kiện: $x < -1$ hay $x > 0$). Ta được:

$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - 2t < 3 \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (t+1)(2t^2 + t - 1) > 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(2t-1) > 0$

$\Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+4}{4x} > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}$ hoặc $x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (0; +\infty)$.

d) $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x$ (5)

Đặt $t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 5(x^2 + 2x)$.

Do đó $(5) \Leftrightarrow t \geq 7 - \frac{t^2 - 1}{5} \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -4$ (loại) hoặc $t \geq 4$ (nhận)

$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 4$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm của (5) là $S = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

f) $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 5$ (6)

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{4x} + 1$.

Do đó $(6) \Leftrightarrow 5t < 2(t^2 - 1) + 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \vee \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4} \vee x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0;\frac{1}{4}\right) \cup (0;+\infty)$.

3.

a) Hàm số $y = \sqrt{x-1-|x^2+3x-4|}$ xác định

$\Leftrightarrow x - 1 - |x^2 + 3x - 4| \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 + 3x - 4| \leq x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \leqslant x-1 \\ x^2+3x-4 \geqslant -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \leqslant 0 \\ x^2+4x-5 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \leqslant -5 \vee x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -5 \\ x \geqslant -3 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -5] \cup [-3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\frac{|x-1|-x-3}{x^2+3x+3}}$ xác định

$\Leftrightarrow |x - 1| - x - 3 \geq 0$ (vì $x^2 + 3x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant x+3 \\ x-1 \leqslant -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant -1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1]$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\frac{1}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+x+6}}$ xác định

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+x+6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+6-(x^2+7x+12)}{(x^2+7x+12)(x^2+x+6)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x-6}{x^2+7x+12} \geqslant 0 \text{ (do } x^2 + x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$-6x-6$		+	|	+	|	+	0	−	
$x^2+7x+12$		+	0	−	0	+	|	+	
Vế trái		+	‖	−	‖	+	0	−	

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -4) \cup (-3; -1]$.

d) Hàm số $y = \sqrt{\sqrt{x^2+5x-14}+x+3}$ xác định

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-14} + x + 3 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-14} \geq -x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-3<0 \\ x^2+5x-14 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x-3 \geq 0 \\ x^2+5x-14 \geq (-x-3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x \leq -7 \vee x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -3 \\ x \leq -23 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ hoặc $x \leq -23$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -23] \cup [2; +\infty)$.

4. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2-\sqrt{3} \vee x \geq 2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2-\sqrt{3} \\ x \geq 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có:

- $x = 0$ không là nghiệm của bất phương trình (*).
- $x > 0$: Chia hai vế của (*) cho $\sqrt{x}$ ta được:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-4+\frac{1}{x}} \geq 3 \quad (**)$$

Đặt $t = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$, ta được:

$(**) \Leftrightarrow t+\sqrt{t^2-6} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6} \geq 3-t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t<0 \\ t^2-6 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3-t \geq 0 \\ t^2-6 \geq (3-t)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t>3 \\ t \geq \sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} t \leq 3 \\ 6t \geq 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t > 3$ hoặc $\frac{5}{2} \leq t \leq 3$

$\Leftrightarrow t \geq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \vee \sqrt{x} \geq 2$

$\Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; \frac{1}{4}] \cup [4; +\infty)$.

§10. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

1.

a) $\dfrac{x-2}{x^2+8x+15} \geq 0$ (1)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^2+8x+15$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (-5; -3) \cup [2; +\infty)$

b) $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \leqslant 0$ (2)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Vế trái		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S = (1; 2) \cup [3; 4]$.

2.

a) $\left|x^2+3x-4\right| = 3-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4 = 3x-3 \\ x^2+3x-4 = -3x+3 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2+6x-7=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 1 \vee x = -7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

b) $\sqrt{x^2-2x+3} = x+\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2}-1 \geqslant 0 \\ x^2-2x+3 = (x+\sqrt{2}-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1-\sqrt{2} \\ -2x+3 = 2(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

c) $\sqrt{x^2+4x-12} \geqslant -x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-4 < 0 \\ x^2+4x-12 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x-4 \geqslant 0 \\ x^2+4x-12 = (-x-4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \leqslant -6 \vee x \geqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant -4 \\ 4x \leqslant -28 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 2 \vee \begin{cases} x \leqslant -4 \\ x \leqslant -7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -7 \\ x \geqslant 2 \end{array}\right.$.

d) $(x-2)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-4 \Leftrightarrow (x-2)\left[\sqrt{x^2+4}-(x+2)\right] \leq 0$ (*)

* $x < 2$:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}-(x+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \geq x+2$

$\Leftrightarrow x+2<0 \vee \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+4 \geq (x+2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x<-2 \vee \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

So sánh điều kiện ta được $x < 2$ là nghiệm của (*).

* $x = 2$ là một nghiệm của (*)

* $x > 2$:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}-(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \leq x+2$

$\Leftrightarrow x^2+4 \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

So sánh điều kiện ta được: $x > 2$ là nghiệm của (*).

e) $\sqrt{x^2+8x} \leq 2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+8x \geq 0 \\ x^2+8x \leq 4(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -8 \vee x \geq 0 \\ 3x^2+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

f) $\sqrt{x(x+3)} \leq 6-x^2-3x$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x(x+3)} \geq 0$. Ta được:

$(1) \Leftrightarrow t \leq 6-t^2 \Leftrightarrow t^2+t-6 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x(x+3)} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \geq 0 \\ x^2+3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3$ hoặc $0 \leq x \leq 1$.

3.

a) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$ (1)

Đặt $u=\sqrt[3]{12-x}$, $v=\sqrt[3]{14+x}$, ta được:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=26 \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=2-u \\ u^3+(2-u)^3=26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v=2-u \\ 6u^2-12u-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12-x=-1 \\ 14+x=27 \end{cases} \vee \begin{cases} 12-x=27 \\ 14+x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 13 \text{ hoặc } x = -15.$$

b) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$ (2)

Đặt $u=\sqrt[3]{x-1}$, $v=\sqrt[3]{x-2}$. Ta được:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\sqrt[3]{u+v} \\ u^3-v^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)\left[(u+v)^2-1\right]=0 \\ u^3-v^3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ 2u^3=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u+v=1 \\ u^3-v^3=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u+v=-1 \\ u^3-v^3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} v=1-u \\ u^3-(1-u)^3=1 \end{cases} \vee \begin{cases} v=-1-u \\ u^3-(-1-u)^3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} v=1-u \\ 2u^3-3u^2+3u-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} v=-1-u \\ 2u^3+3u^2+3u=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \\ v-u \end{cases} \vee \begin{cases} v=0 \\ u=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=0 \\ v=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \vee x=2 \vee x=1.$$

4.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+21 \geqslant 0 \\ -x^2+3x+10 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 7 \\ -2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5.$

Vậy tập xác định của y là D = [–2; 5].

Với x ∈ D, ta có:

$-x^2 + 4x + 21 - (-x^2 + 3x + 10) = x + 11 > 0$ nên $y > 0$.

Ta có

$$y^2 = -x^2+4x+21-x^2+3x+10-2\sqrt{(-x^2+4x+21)(-x^2+3x+10)}$$

$$= -2x^2 + 7x + 31 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)}$$

$$= -2x^2 + 7x + 31 - 2\sqrt{(x+3)(5-x)(x+2)(7-x)}$$

$$= (-x^2 + 2x + 15) + (-x^2 + 5x + 14) - 2\sqrt{(-x^2+2x+15)(-x^2+5x+14)} + 2$$

$$= \left(\sqrt{-x^2+2x+15}-\sqrt{-x^2+5x+14}\right)^2+2 \geq 2.$$

Do đó $y \geq \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow -x^2+2x+15=-x^2+5x+14 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Vậy min $y=\sqrt{2}$.

5.

Ta có: $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ với a, b > 0 nên

$$A \geq \frac{1}{x}+\frac{2}{x+y}=2\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+y}\right) \geq 2.\frac{4}{2x+(x+y)}=\frac{8}{3x+y} \geqslant 8$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}$. Vậy minA = 8.

6.

a) $f(x)=\frac{1}{m}x^2+2(m-2)x+m^2>0, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m}>0 \\ (m-2)^2-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2-5m+4<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 1<m<4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<4.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1 < m < 4$.

b) $f(x)=(m-2)x^2+2(m-2)x+m+4$.

TH1: $a=0 \Leftrightarrow m=2$:

Khi đó $f(x)=6>0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m=2$ (nhận)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$:

Ta có $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ (m-2)^2-(m-2)(m+4)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ -6(m-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m>2 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq 2$.

7.

a) $f(x)=(m-2)x^2+2x-4$

TH1: $a=0 \Leftrightarrow m=2$: Khi đó $f(x)=2x-4<0 \Leftrightarrow x<2 \Rightarrow m=2$ (loại)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$:

Ta có: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ 1-(m-2)(-4) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{7}{4}$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < \dfrac{7}{4}$.

b) $f(x) = m(m+8)x^2 - 2(m+8)x + 8m + 1$

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -8$.

Khi $m = 0$ thì $f(x) = -16x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{16} \Rightarrow m = 0$ (loại)

Khi $m = -8$ thì $f(x) = -63 < 0, \forall x \Rightarrow m = -8$ (nhận)

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$ hay $m \neq 0$:

Khi đó $f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m < 0 \\ (m+8)^2 - m(m+8)(8m+1) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m < 0 \\ m + 8 - 8m^2 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m < 0 \\ 8m^2 > 8 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < m < -1$.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -8 \leq m < -1$.

8.

a) $2x^2 - (m+9)x + m^2 - 3m + 4 \geq 0$ (1).

Ta có $\Delta = (m+9)^2 - 8(m^2 - 3m + 4) = -7m^2 + 42m + 49$

Bảng xét dấu Δ:

m	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Biện luận:

* $m \leq -1$ hay $m \geq 7$ thì $\Delta \leq 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x$ nên tập nghiệm của (1) là $S = \mathbb{R}$.

* $-1 < m < 7$: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{m+9-\sqrt{\Delta}}{4} \leq x \leq \dfrac{m+9+\sqrt{\Delta}}{4} = x_2$.

Kết luận: + $m \leq -1$ hay $m \geq 7$: $S = \mathbb{R}$.

+ $-1 < m < 7$: $S = [x_1; x_2]$.

b) $(m+1)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$ (2)

TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$:

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$:

Ta có $\Delta' = m^2 - 2m(m+1) = -m^2 - 2m$.

Bảng xét dấu Δ:

m	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
a		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
Δ		$-$	0	$+$			0	$-$	

Gọi hai nghiệm nếu có của vế trái (2) là $x_1 = \dfrac{m - \sqrt{\Delta'}}{m+1}$; $x_2 \leqslant \dfrac{m + \sqrt{\Delta'}}{m+1}$

Biện luận:

* $m \leq -2$ thì $\Delta \leq 0$ và $a < 0$ nên $f(x) \leq 0, \forall x$ nên tập nghiệm của (2) là $S = \mathbb{R}$.
* $-2 < m < -1$: $\Delta' > 0$ và $a < 0$ nên (2) $\Leftrightarrow x \leq x_2$ hoặc $x \geq x_1$.
* $-1 < m < 0$: $\Delta' > 0$ và $a > 0$ nên (2) $\Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$.
* $m = 0$: $\Delta' = 0$ và $a > 0$ nên (2) $\Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$.
* $m > 0$: $\Delta' < 0$ và $a > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Kết luận: + $m \leq -2$: $S = R$.

+ $-2 < m < -1$: $S = (-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$.

+ $m = -1$: $S = (-\infty; 1]$.

+ $-1 < m < 0$: $S = [x_1; x_2]$.

+ $m = 0$: $S = \{x_1; x_2\}$.

+ $m > 0$: $S = \varnothing$.

9.

a) Ta có: $\left|\dfrac{x^2+mx+1}{x^2+1}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow |x^2 + mx + 1| \leq x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+1 \leqslant 2x^2+2 \\ x^2+mx+1 \geqslant -2x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-mx+1 \geqslant 0 \quad (a) \\ 3x^2+mx+3 \geqslant 0 \quad (b) \end{cases}$$

Bất phương trình $\left|\dfrac{x^2+mx+1}{x^2+1}\right| \leqslant 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_a \leqslant 0 \\ \Delta_b \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \leqslant 0 \\ m^2 - 36 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

b) Hàm số $y = \sqrt{m(m+2)x^2 + 2mx + 2}$ xác định với mọi x

$\Leftrightarrow g(x) = m(m+2)x + 2mx + 2 \geq 0, \forall x$

▸ $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = -2$:

* $m = 0$: $g(x) = 2 \geq 0, \forall x$ nên $m = 0$ thỏa.

* $m = -2$: $g(x) = -4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = -2$ (loại).

▸ $a \neq 0$: Ta có:

$$g(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 4m \leq 0 \\ m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \vee m \geq 0 \\ m < -2 \vee m > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \leq -4$ hoặc $m > 0$.

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$.

10.

a) $$\begin{cases} \dfrac{x^2-6x-4}{x-1} > 2 \\ (x-2)(x^2+6x-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-8x}{x-1} > 0 \quad (1) \\ (x-2)(x^2+6x-7) \leq 0 \, (2) \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu của vế trái (1) và (2) ta được:

(1) có tập nghiệm là $S_1 = (0; 1) \cup (8; +\infty)$.

(2) có tập nghiệm là $S_2 = [-7; 1] \cup [2; +\infty)$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (0; 1) \cup (8; +\infty)$.

b) $$\begin{cases} |2x-3| \leq x+6 \ (a) \\ \sqrt{x-1} \leq x-3 \ (b) \end{cases}$$

Ta có: (a) $\Leftrightarrow -x - 6 \leq 2x - 3 \leq x + 6 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 9$.

$$(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x-1 \leq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \vee x \geq 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \geq 5$.

Kết hợp (a) và (b) ta được bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = [5; 9]$.

CHƯƠNG 5. THỐNG KÊ

§1. MỘT VÀI KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Thống kê là gì?

➢ Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, xử lí và phân tích dữ liệu nhằm mục đích nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên, xã hội, kinh tế, kĩ thuật…

➢ Thống kê được chia thành hai lĩnh vực:

– *Thống kê mô tả*: Bao gồm các phương pháp thu thập số liệu, mô tả và trình bày số liệu, tính toán các đặc trưng đo lường

– *Thống kê suy diễn*: Bao gồm các phương pháp phân tích, kiểm định và dự đoán.

Trong chương trình trung học, học sinh chỉ học thống kê mô tả.

2. Mẫu và kích thước của mẫu

Thống kê thường được bắt đầu bằng việc *lập bảng số liệu ban đầu* bao gồm *danh sách các phần tử của tập hợp được thống kê* (còn được gọi là *tập hợp các đơn vị điều tra*) và *dấu hiệu cần thống kê* của các *đơn vị điều tra* đó.

– Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là **mẫu**.

– Số phần tử của một mẫu được gọi là **kích thước mẫu**.

– Dãy các dấu hiệu thu được trên mẫu gọi là **mẫu số liệu**.

– **Điều tra toàn bộ** là điều tra trên mọi đơn vị điều tra.

– **Điều tra mẫu** là điều tra chỉ tiến hành trên một mẫu.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

***Vấn đề 1:* xác định các yếu tố của một mẫu số liệu**

1. Phương pháp

* *Dấu hiệu điều tra* là một vấn đề hay một hiện tượng nào đó mà người điều tra phải tìm hiểu.

* Mỗi một đối tượng điều tra gọi là *một đơn vị điều tra.*

* Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là *mẫu.*

* Số phần tử của một mẫu được gọi là *kích thước mẫu.*

* Mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là *giá trị* của dấu hiệu trên đơn vị điều tra đó hay còn gọi là một số liệu của mẫu.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 200 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

Trong bảng số liệu ban đầu trên, hãy cho biết:

a) Dấu hiệu điều tra và đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Mẫu và kích thước mẫu?

c) Các giá trị khác nhau?

Giải

a) Trong bảng số liệu ban đầu trên:

* dấu hiệu điều tra là tuổi nghề của mỗi công nhân.

* đơn vị điều tra là một công nhân của nhà máy A.

b) Mẫu ở đây là tập hợp 30 công nhân của nhà máy A.
Kích thước mẫu là 30.

c) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là:
1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 14.

Ví dụ 2: Điều tra về năng suất lúa của 40 hợp tác xã nông nghiệp, người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau (tính theo tạ/ ha):

31,8	28,7	31,2	33,1	35,1	29,1	33,9	31,2	33,7	34,9
39,5	33,7	29,4	31,8	26,9	28,3	34,3	36,6	23,7	34,6
35,7	29,8	32,1	33,8	35,2	34,9	34,3	30,6	38,9	32,2
38,4	30,2	32,4	34,8	28,9	33,1	38,1	34,4	32,6	35,8

Trong bảng số liệu trên, hãy cho biết:

a) Dấu hiệu điều tra và đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Mẫu và kích thước mẫu?

c) Các giá trị khác nhau?

Giải

a) Trong bảng số liệu trên, ta có:

* dấu hiệu điều tra là năng suất lao của một hợp tác xã.

* đơn vị điều tra là một hợp tác xã.

b) Mẫu ở đây là tập hợp 40 hợp tác xã. Kích thước mẫu là 40.

c) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là:
23,7; 26,9; 28,3; 28,7; 29,1; 29,4; 29,8; 30;2; 31,2; 31,8; 32,1;
32,2; 32,4; 32,6; 33,7; 33,7; 33,8; 33,9; 34,3; 34,4; 34,6; 34,8;
35,1; 35,2; 35,7; 35,8; 36,6; 38,1; 38,4; 38,9; 39,5,

3. Bài tập

Bài 1: Để điều tra số con trong mỗi gia đình ở quận A, người ta chọn ra 60 gia đình, thống kê số con của các gia đình này người ta thu được mẫu số liệu sau:

2	3	4	2	0	2	2	3	4	5
4	1	2	2	5	3	1	2	3	2
5	2	7	3	4	6	2	3	4	3
4	3	2	5	2	2	2	3	1	2
3	2	2	2	3	1	3	2	1	3
2	1	1	0	2	1	0	2	2	3

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

Bài 2: Điều tra lượng nước tiêu thụ trong một tháng (tính theo m^3) của 40 gia đình ở phường A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

20	35	40	25	24	22	21	33	41	42
43	19	28	27	50	30	18	26	32	22
15	24	27	37	41	16	12	13	24	33
40	33	28	51	27	21	20	30	18	29

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM TẦN SỐ, TẦN SUẤT

Định nghĩa

- Số lần xuất hiện của giá trị x_i trong mẫu số liệu được gọi là **tần số** của giá trị x_i. Ta kí hiệu tần số của x_i là n_i.
- **Tần suất** f_i của giá trị x_i là **tỉ số giữa tần số n_i và kích thước N** của mẫu.

Nghĩa là $f_i = \frac{n_i}{N}$. Tần suất thường được viết dưới dạng %: $f_i = \frac{n_i}{N}$ %.

II. BẢNG PHÂN PHỐI TẦN SỐ – TẦN SUẤT

Để trình bày gọn gàng một mẫu số liệu ta dùng bảng sau đây, gọi là bảng ***phân bố tần số***

Bảng phân phối *tần số – tần suất* có dạng:

Giá trị của x	x_1	x_2	x_3	...	...	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	...	n_m	**Tổng: N**

Bổ sung vào bảng phân bố tần số một hàng tần suất, ta được bảng sau đây, gọi là ***bảng phân phối tần số – tần suất.***

Bảng phân phối *tần số – tần suất* có dạng:

Giá trị của x	x_1	x_2	x_3	...	...	x_m	**Cộng**
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	...	n_m	**Tổng: N**
Tần suất (f %)	f_1	f_2	f_3	...	...	f_m	**Tổng: %**

III. BẢNG PHÂN PHỐI TẦN SỐ – TẦN SUẤT GHÉP LỚP

Để trình bày mẫu số liệu được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, ta thực hiện việc ghép các số liệu thành các lớp. Ta *sắp thứ tự dãy số liệu* rồi chia chúng ra thành các lớp (đoạn hay nửa khoảng) có độ dài bằng nhau tạo thành bảng **phân phối tần số – tần suất ghép lớp** có dạng:

Giá trị của x (được chia lớp)	Giá trị trung tâm (của lớp)	Tần số	Tần suất
$[x_1, x_2]$	a_1	n_1	f_1
$[x_3, x_4]$	a_2	n_2	f_2
$[x_5, x_6]$	a_3	n_3	f_3
.....	...	...	...
$[x_{2m-1}, x_{2m}]$	a_m	n_m	f_m
		Tổng: N	Tổng: 100%

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Lập bảng phân bố tần số, tần suất

1. Phương pháp

Để lập bảng phân bố tần số – tần xuất từ bảng số liệu ban đầu ta thực hiện các bước:

– Sắp thứ tự các giá trị trong mẫu số liệu.

– Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện.

– Tính tần suất f_i của x_i theo công thức: $f_i = \frac{n_i}{N}\%$. Với N là kích thước của mẫu.

– Đặt các số liệu x_i, n_i và f_i vào bảng ta thu được bảng phân bố tần số – tần suất.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ/ha) của giống lúa đó trên 40 thửa ruộng có cùng diện tích 1 ha trong bảng sau:

30	32	32	34	38	36	38	36
40	30	40	40	34	38	36	36
38	40	30	40	32	30	30	30
40	38	38	34	34	32	32	36
34	40	34	30	38	38	32	32

a) Trong cuộc điều tra trên dấu hiệu điều tra, mẫu và kích thước mẫu?

b) Lập bảng phân bố tần số – tần suất của mẫu số liệu trên.

Giải

a) Trong cuộc điều tra trên:

* Dấu hiệu điều tra là năng suất của giống lúa mới trên một thửa ruộng có diện tích 1 ha.

* Mẫu là tập hợp 40 thửa ruộng được điều tra. Kích thước mẫu là 40.

b) Bảng phân bố tần số – tần suất:

Năng suất	30	32	34	36	38	40	**Cộng**
Tần số	7	7	6	5	8	7	**N = 40**
Tần suất %	17,5	17,5	15,0	12,5	20,0	17,5	**Tổng: 100%**

Ví dụ 2: Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 200 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	7	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
8	4	10	2	8	5	5	7	3	8

a) Trong cuộc điều tra trên hãy xác định tập hợp thống kê, dấu hiệu, mẫu và kích thước mẫu.

b) Kí hiệu dấu hiệu là X, hãy xác định mẫu số liệu, tính tần số, tần suất của các giá trị trong mẫu số liệu và lập bảng phân phối tần số – tần suất của mẫu số liệu đó.

Giải

a) Trong cuộc điều tra trên:

* Tập hợp thống kê là tập hợp gồm 200 công nhân của nhà máy A.
* Dấu hiệu điều tra là tuổi nghề của mỗi công nhân.
* Mẫu là tập hợp 30 công nhân được điều tra. Kích thước mẫu là 30.

b) Bảng phân phối tần số – tần suất:

Tuổi nghề	1	2	3	4	5	6	7	8	10	**Cộng**
Tần số	1	3	2	6	5	1	6	4	2	**N = 30**
Tần suất (%)	3,3	10	6,7	20	16,7	3,3	20	13,3	6,7	**Tổng 100%**

Ví dụ 3: Điểm số 30 lần bắn của xạ thủ A (mỗi lần bắn 1 viên đạn) được cho bởi bảng số liệu ban đầu sau:

8	9	10	9	9	8	7	6	8	10
10	7	10	9	8	10	8	9	8	7
10	7	7	9	9	6	9	8	10	8

Hãy lập bảng phân phối tần số - tần suất của mẫu số liệu trên.

Giải

Bảng phân phối tần số và tần suất của mẫu số liệu trên là:

Điểm số (X)	6	7	8	9	10	**Cộng**
Tần số (n)	2	5	8	8	7	**N = 30**
Tần suất (f)	6,7	16,7	26,6	26,6	23,4	**100%**

Ví dụ 4: Điểm môn Toán của 20 học sinh lớp 10 được cho bởi bảng số liệu ban đầu như sau:

4	1	3	9	5	9	5	6	6	5
0	1	5	5	4	8	6	9	5	10

Hãy lập bảng phân phối tần số - tần suất tương ứng.

Giải

Bảng phân phối tần số tần suất môn Toán

Điểm số (X)	0	1	3	4	5	6	7	9	10	**Cộng**
Tần số (n)	1	2	1	2	6	3	1	3	1	**N = 20**
Tần suất (f)	5	10	5	10	30	15	5	15	5	**Tổng: 100%**

Vấn đề 2: **Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp**

1. Phương pháp

Để lập bảng **phân phối tần số - tần suất ghép lớp** từ bảng số liệu ban đầu ta thực hiện các bước:

Bước 1: Nhóm các giá trị của mẫu số liệu thành từng lớp $[x_i, x_{i+1}]$ (hoặc $[x_i, x_{i+1})$).

* Mỗi lớp có bề rộng bằng nhau và bằng $d = x_{i+1} - x_i$.

* x_i là cận dưới, x_{i+1} là cận trên.

Bước 2: Tính giá trị trung tâm a_i của lớp $[x_i; x_{i+1}]$ bằng công thức $a_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

(Giá trị trung tâm của mỗi lớp dùng để đại diện cho lớp đó).

Bước 3: Tính tần số của từng lớp $[x_i, x_{i+1}]$ (hoặc $[x_i, x_{i+1})$) bằng cách đếm số lần n_i các giá trị của mẫu số liệu thuộc khoảng $[x_i, x_{i+1}]$ (hoặc $[x_i, x_{i+1})$).

Bước 4: Tính tần suất của từng lớp $[x_i, x_{i+1}]$ (hoặc $[x_i, x_{i+1})$) theo công thức: $f_i = \frac{n_i}{N}\%$.

Bước 5: Lập bảng phân phối tần số, tần suất ghép lớp.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Điều tra về năng suất lúa của 40 hợp tác xã nông nghiệp, người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau (tính theo tạ/ ha):

31,8	28,7	31,2	33,1	35,1	29,1	33,9	31,2	33,7	34,9
39,5	33,7	29,4	31,8	26,9	28,3	34,3	36,6	23,7	34,6
35,7	29,8	32,1	33,8	35,2	34,9	34,3	30,6	38,9	32,2
38,4	30,2	32,4	34,8	28,9	33,1	38,1	34,4	32,6	35,8

Hãy lập bảng phân phối tần số – tần suất ghép lớp của bảng số liệu trên.

Giải

THỐNG KÊ NĂNG SUẤT LÚA

Năng suất (Tạ/ha)	Giá trị trung tâm	Tần số	Tần suất %
Dưới 27		2	5,0
[27, 29)	28	3	7,5
[29, 31)	30	5	12,5
[31, 33)	32	8	20,0
[33, 35)	34	13	32,5
[35, 37)	36	5	12,5
[37, 39)	38	3	7,5
[39, 41)	40	1	2,5
		N = 40	**Tổng: 100 %**

Vấn đề 3: Vẽ biểu đồ hình cột

1. Phương pháp

Để trình bày mẫu số liệu một cách trực quan sinh động, dễ nhớ, dễ hiểu và gây ấn tượng, trong thống kê mô tả người ta thường sử dụng các biểu đồ. Các biểu đồ có sức hấp dẫn về mặt hình thức, giúp người xem dễ dàng thấy được các giá trị so sánh.

Có nhiều loại biểu đồ, sau đây là một trong số các biểu đồ thông dụng nhất, đó là biểu đồ hình cột:

Biểu đồ tần số, tần suất hình cột:

Biểu đồ hình cột rất thích hợp để biểu diễn bảng phân phối tần số (hay tần suất) ghép lớp.

Biểu đồ hình cột đơn giản, giúp người xem thấy được sự so sánh tương đối về tần số hoặc tần suất của các lớp số liệu, từ đó thấy được sự phân bố tập trung của số liệu thống kê.

Cách vẽ biểu đồ tần số – tần suất ghép lớp hình cột:

– Vẽ hai đường thẳng vuông góc.

– Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các đoạn (khoảng) xác định lớp.

– Tại mỗi khoảng ta dựng một cột hình chữ nhật với đáy là khoảng đó còn chiều cao bằng tần số hoặc tần suất của lớp mà khoảng đó xác định.

– Hình thu được gọi là biểu đồ hình cột tần số hoặc tần suất.

2. Các ví dụ

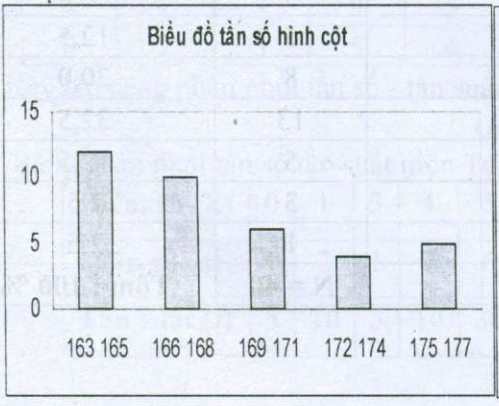
Ví dụ 1: Cho bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp sau đây:

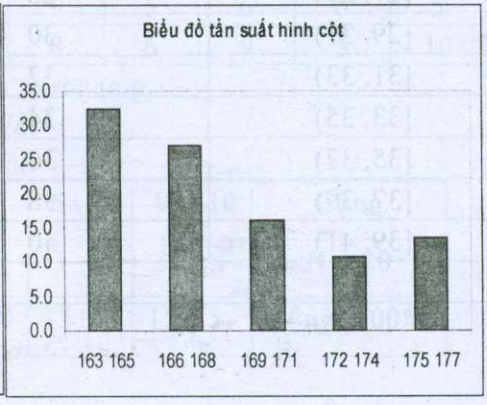
Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[163; 165]	12	32,4
[166; 168]	10	27,1
[169; 171]	6	16,2
[172; 174]	4	10,8
[175; 177]	5	13,5
	N = 37	100

Hãy vẽ biểu đồ tần số và biểu đồ tần suất hình cột.

Giải

Ta có biểu đồ tần số và biểu đồ tần suất hình cột của bảng phân bố tần số – tần suất được cho như sau:





Chú ý:

Trong hai biểu đồ trên giữa các cột có khe hở. Ví dụ sau cho ta biểu đồ mà giữa các cột không có khe hở, ta gọi hình này là tổ chức đồ (histogram).

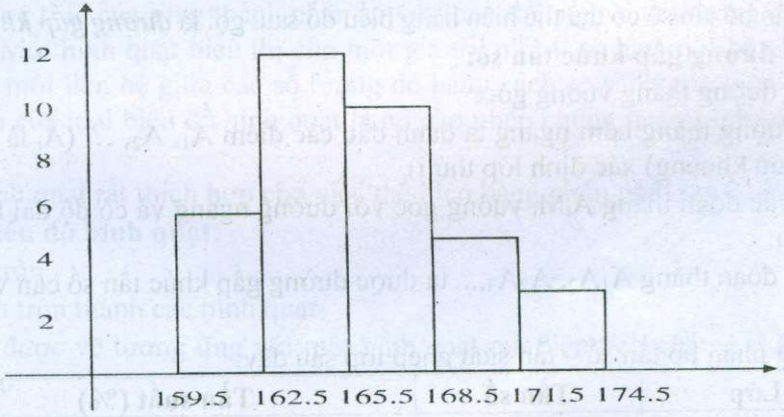
Ví dụ 2: Thống kê chiều cao của 36 học sinh nam của một trường THPT ta được bảng phân phối tần số - tần suất ghép lớp sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	[159,5; 162,5)	6	17%
2	[162,5; 165,5)	12	33%
3	[165,5;168,5)	10	28%
4	[168,5; 171,5)	5	14%
5	[171,5; 174,5)	3	8%
		36	100%

Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Giải

Ta có biểu đồ tần số tương ứng của bảng phân bố tần số – tần suất trên có dạng:



Ví dụ 3: Sự gia tăng sản lượng lúa của Việt Nam năm từ năm 1935 đến năm 1999 được cho bởi bảng sau:

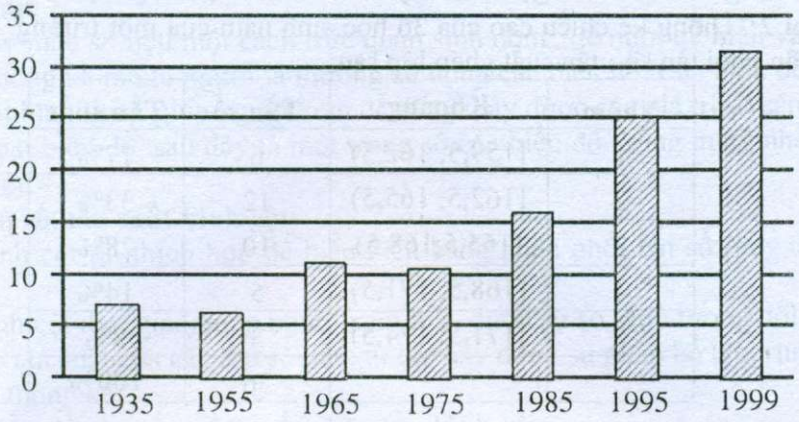
Năm	Sản lượng
1935	7
1955	6,2
1965	11,1
1975	10,5
1985	15,9
1995	25
1999	31,4

Hãy vẽ biểu đồ cột tương ứng.

760mtlg = 1

Giải

Biểu đồ sự gia tăng sản lượng lúa của Việt Nam 1935 – 1999



***Vấn đề 4:* vẽ đường gấp khúc tần số, tần suất**

1. Phương pháp

Bảng phân bố tần số có thể thể hiện bằng biểu đồ sau, gọi là ***đường gấp khúc tần số.***

Cách vẽ đường gấp khúc tần số:

– Vẽ hai đường thẳng vuông góc.

– Trên đường thẳng nằm ngang ta đánh dấu các điểm A_1, A_2, … (A_i là trung điểm của đoạn (nửa khoảng) xác định lớp thứ i)

– Dựng các đoạn thẳng A_iM_i vuông góc với đường ngang và có độ dài bằng tần số của lớp thứ i.

– Vẽ các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3,... ta được đường gấp khúc tần số cần vẽ.

2. Ví dụ

Cho bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[163; 165]	12	32,4
[166; 168]	10	27,1
[169; 171]	6	16,2
[172; 174]	4	10,8
[175; 177]	5	13,5
	N = 37	100

Hãy vẽ đường gấp khúc tần số tương ứng.

Giải

Có tất cả 5 lớp.

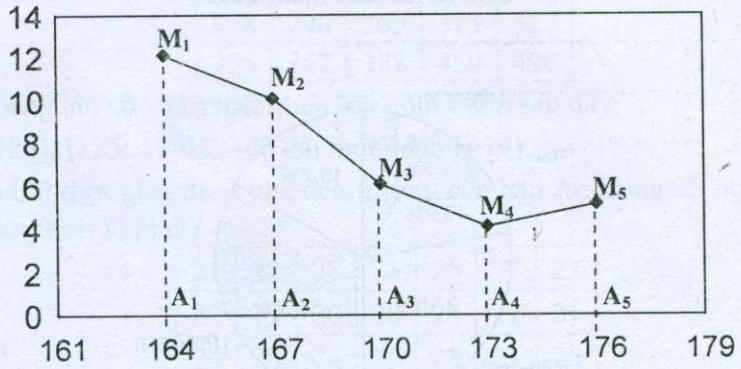
Giá trị trung tâm của các lớp là:

$A_1 = 164$; $A_2 = 167$; $A_3 = 170$; $A_4 = 193$ và $A_5 = 179$.

Các tần số tương ứng là: $n_1 = 12$; $n_2 = 10$; $n_3 = 6$; $n_4 = 4$ và $n_5 = 5$.

Từ đó ta vẽ được đường gấp khúc tần số sau:

Đường gấp khúc tần số



Vấn đề 5: vẽ biểu đồ hình quạt

1. Phương pháp

Để thấy được tỉ lệ của từng thành phần so với toàn thể, người ta thường dùng biểu đồ hình quạt. Mỗi hình quạt biểu thị cho một giá trị, một tỉ số hay một hệ số. Chúng ta nghiên cứu mối liên hệ giữa các số lượng đó bằng cách so sánh góc giữa các hình quạt. Ưu điểm của loại biểu đồ hình quạt là nó cho phép chúng ta so sánh trị số cũng như tỉ số.

Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân phối tần suất ghép lớp.

Cách vẽ biểu đồ hình quạt:

– Vẽ hình tròn

– Chia hình tròn thành các hình quạt

– Mỗi lớp được vẽ tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

2. Các ví dụ

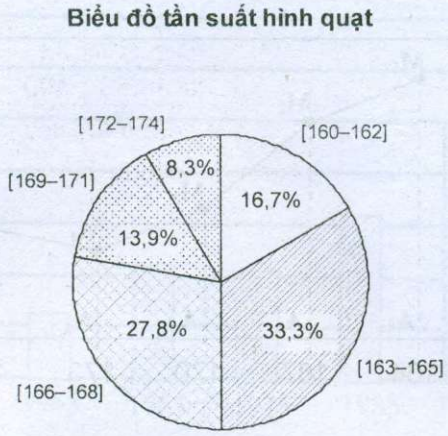
Ví dụ 1:

Vẽ biểu đồ hình quạt thống kê chiều cao của 36 học sinh nam của một trường Trung học phổ thông được cho bởi bảng phân phối tần số - tần suất sau:

Nhóm	Lớp	Tần số	Tần suất
1	[160 -162]	6	16,7
2	[163 -165]	12	33,3
3	[166 -168]	10	27,8
4	[169 -171]	5	13,9
5	[172 -174]	3	8,3
		N = 36	100%

Giải

Biểu đồ thống kê chiều cao của học sinh THPT



Chú ý: Các biểu đồ hình cột, đường gấp khúc, biểu đồ hình quạt không những sử dụng để minh họa bằng hình ảnh bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp mà còn được sử dụng rộng rãi trong việc thống kê ở nhiều tình huống khác. Ví dụ sau cho thấy điều đó:

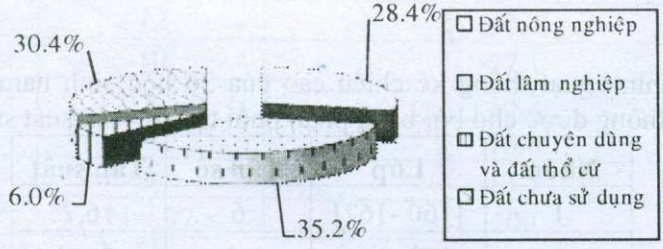
Ví dụ 2: Cơ cấu các loại đất Việt Nam năm 2000 cho bởi bảng sau:

Loại đất	Đất nông nghiệp	Đất lâm nghiệp	Đất chuyên dụng và thổ cư	Đất chưa sử dụng
Tỉ lệ %	28,4	35,2	6,0	30,4

Vẽ biểu đồ cơ cấu các loại đất Việt Nam năm 2000?

Giải

Biểu đồ cơ cấu các loại đất Việt Nam năm 2000



C. BÀI TẬP

Bài 1: Trong một giải đấu bóng đá học sinh, người ta tổ chức dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất. Sau đây là số phiếu dự đoán của 25 trận mà ban tổ chức nhận được:

54	75	121	142	154
159	171	189	203	211
225	247	251	259	264
278	290	305	315	322
355	367	388	450	490

Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp gồm 6 lớp sau đây:

[50; 124], [125; 199]... (độ dài mỗi đoạn là 74).

Bài 2: Theo dõi thời gian đi từ nhà đến trường của bạn An trong 35 ngày, ta có bảng số liệu sau: (đơn vị phút)

21	22	22	21	26	27	23
22	19	20	20	28	29	21
24	23	24	23	28	25	26
19	20	21	22	26	25	21
23	23	24	23	25	26	24

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp với các lớp

[19; 21), [21; 23),..., [27; 29].

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột, biểu đồ tần suất hình cột và vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

c) Trong các ngày khảo sát, những ngày bạn An đi đến trường từ 21 đến dưới 25 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

Bài 3: Đo độ dài của 60 lá cây dương xỉ người ta thu được bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp của độ dài (cm)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50]	**Cộng**
Tần số	8	18	24	10	60

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp tương ứng.

b) Dựa vào bảng lập được hãy cho biết trong 60 lá cây dương xỉ được khảo sát: Số lá có độ dài dưới 30cm chiếm bao nhiêu phần trăm? Số lá có độ dài từ 30cm đến 50cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

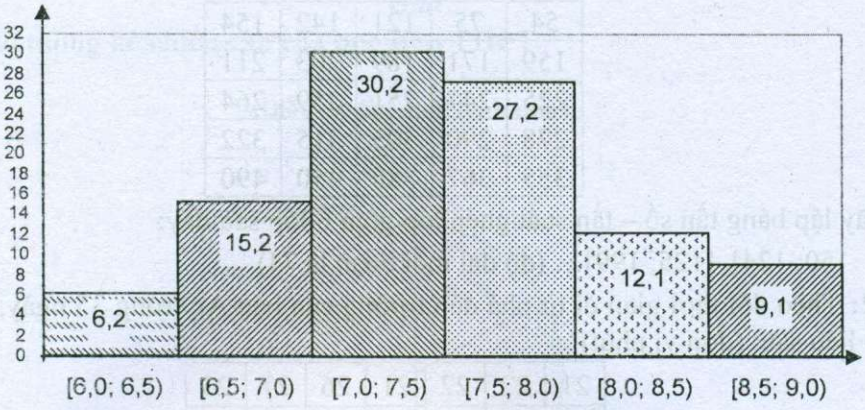
Bài 4: Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ô tô đi qua trạm và có bảng số liệu sau:

63	63	46	60	63	36	49	69	75	78
60	83	60	48	51	58	59	80	57	44
63	66	53	77	42	75	47	42	59	55

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất (chính xác đến phần nghìn) ghép lớp với các lớp sau [36; 43], [44; 51],... (độ dài mỗi lớp là 7)

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột, biểu đồ tần suất hình cột và vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 5: Cho biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (giây) chạy 50m của học sinh lớp 10A ở trường trung học phổ thông B sau:



a) Dựa vào biểu đồ trên, hãy nêu nhận xét về thành tích chạy 50m của học sinh lớp 10A.

b) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp và vẽ đường gấp khúc tần suất.

Bài 6: Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau:

Lớp	Tần số	Tần suất
[1; 10]	5	6,25
[11; 20]	29	....
[21; 30]	21	....
[31; 40]	16	....
[41; 50]	7	....
[51; 60]	2	....

a) Hãy điền các số vào chỗ trống (....) ở cột tần suất.

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 7: Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ty trong một tháng như sau (đơn vị: triệu đồng)

120	121	129	114	88	109	95	147	118	128
148	71	93	67	62	57	103	135	97	166
83	114	66	156	88	64	49	101	79	120
75	113	155	48	104	112	79	87	88	141
55	123	152	60	83	144	84	95	90	27

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp gồm bảy lớp có độ dài là 22 sau: [26,5; 48,5), [48,5; 70,5),....

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Bài 8: Điều tra về số cuộn phim chụp được trong tháng trước của 50 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư, người ta thu được bảng số liệu sau:

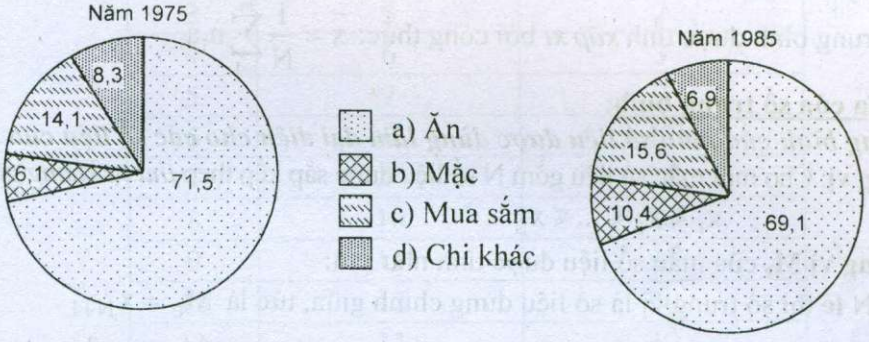
5	6	4	3	5	3	3	9	5	1
6	15	0	6	4	3	6	10	4	7
4	3	0	5	11	6	2	3	3	8
4	12	5	1	4	5	7	3	8	4
1	14	0	2	2	12	4	2	4	7

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp là các đoạn có độ dài là 2 và lớp đầu tiên là [0; 2] và lớp cuối cùng là [15; 17].

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Bài 9: Cho các biểu đồ hình quạt sau đây:



Biểu đồ cơ cấu chi tiêu của nhân dân Việt nam, phân theo các khoản chi (%)

Dựa vào biểu đồ hình quạt đã cho, hãy lập bảng trình bày cơ cấu chi tiêu của nhân dân Việt nam trong năm 1975 và năm 1985.

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Số trung bình

a) Giả sử mẫu số liệu có kích thước N, gồm N số liệu thống kê là x_1; x_2; ...; x_N thì **số trung bình** $\bar{x}$ của mẫu số liệu $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ được tính bởi công thức:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$ hoặc viết tắt là: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

b) Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng *phân phối tần số*:

x	x_1	x_2	.....	x_m	
Tần số	n_1	n_2	.....	n_m	N

thì số trung bình được tính bởi công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{N} \text{ hay } \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_ix_i .$$

Trong đó n_i là tần số của số liệu x_i (I = 1, 1, ..., m), $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

c) Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng *phân phối ghép lớp tần số*:

x (Lớp)	Giá trị trung tâm	Tần số
$[x_0; x_1]$	a_1	n_1
$[x_1; x_2]$	a_2	n_2
...	...	...
$[x_{m-1}; x_m]$	a_m	n_m

thì số trung bình được tính *xấp xỉ* bởi công thức: $\bar{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_ia_i$.

Ý nghĩa của số trung bình:

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

2. Số trung vị: Cho một mẫu số liệu gồm N số liệu được sắp xếp theo *thứ tự không giảm*:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_N$$

Số trung vị M_e của mẫu số liệu được tính như sau:

– Nếu N **lẻ** thì số trung vị là số liệu đứng chính giữa, tức là $M_e = x_{\frac{N+1}{2}}$.

– Nếu N **chẵn** thì số trung vị là trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$,

tức là $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right)$.

3. Mốt:

Mốt (Mốt) của một mẫu số liệu $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ **là giá trị x_i có tần số lớn nhất.**

Mốt được kí hiệu là M_0.

4. Phương sai:

Phương sai s^2 của một mẫu số liệu: $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ được tính bởi công thức

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

5. Độ lệch chuẩn: *Độ lệch chuẩn* s bằng căn bậc hai của phương sai.

6. Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn:

Phương sai và độ lệch chuẩn đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Tính số trung bình**

1. Phương pháp

Tùy theo mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số hoặc được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp mà ta dùng các công thức thích hợp để tính.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Trong một kì kiểm tra ở khối học sinh lớp 10 gồm 234 em với đề thi gồm 20 câu hỏi, người ta thu được bảng số liệu sau:

Thống kê số liệu về số câu học sinh trả lời đúng

Thứ tự	Số câu trả lời đúng	Tần số (Số bài)
1	3	1
2	4	2
3	5	2
4	6	3
5	7	7
6	8	12
7	9	21
8	10	22
9	11	31
10	12	30
11	13	19
12	14	34
13	15	21
14	16	21
15	17	4
16	18	3
17	19	1
		N = 234

Tính số trung bình của mẫu số liệu trên.

Giải

Ta có:

$x_1 = 3, n_1 = 1; x_2 = 4, n_2 = 2; x_3 = 5, n_3 = 2;....;$

$x_{16} = 18, n_{16} = 3; x_{17} = 19, n_{17} = 1.$

Do đó áp dụng công thức: $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{N}$ ta có:

$$\overline{x} = \frac{1.3 + 2.4 + 2.5 + ... + 4.17 + 3.18 + 1.19}{234} = \frac{2809}{234} \approx 12.$$

Ví dụ 2:

Một nhà thực vật học đo chiều dài của 96 lá cây và thu được bảng tần số sau

(đơn vị: mm)

Lớp	Giá trị đại diện (trung tâm)	Tần số
[5,45; 5,85)		5
[5,85; 6,25)		9
[6,25; 6,65)		25
[6,65; 7,05)		19
[7,05; 7,45)		17
[7,45; 7,85)		8
[7,85; 8,25)		13
		N = 96

a) Tìm các giá trị đại diện và điền kết quả vào bảng trên.

b) Tìm chiều dài trung bình của 96 lá cây trên?

Giải

a) Giá trị đại diện của lớp [5,45; 5,85) là $a_1 = \frac{5,45+5,85}{2} = 5,65.$

Giá trị đại diện của lớp [5,85; 6,25) là $a_2 = \frac{5,85+6,25}{2} = 6,05.$

Tương tự ta có: $a_3 = 6,45$; $a_4 = 6,85$; $a_5 = 7,25$; $a_6 = 7,65$; $a_7 = 8,05$.

b) Chiều dài trung bình của 96 lá cây là:

$$\bar{x} = \frac{5.5,65+9.6,05+25.6,45+19.6,85+17.7,25+8.7,65+13.8,05}{96}$$

$\approx 6,91$ (mm).

Vấn đề 2: Tìm số trung vị và mốt

1. Phương pháp

a) Tìm số trung vị:

Để tìm số trung vị của một mẫu số liệu ta làm như sau:

➢ Sắp xếp các giá trị của mẫu số liệu theo *thứ tự không giảm*:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N$$

➢ **Số trung vị M_e** của mẫu số liệu được tính như sau:

– Nếu N **lẻ** thì số trung vị là số liệu đứng chính giữa, tức là $M_e = x_{\frac{N+1}{2}}$.

– Nếu N **chẵn** thì số trung vị là trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$, tức là $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right)$.

b) Tìm mốt:

Để tìm mốt của một mẫu số liệu $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ ta thực hiện như sau:

* Lập bảng phân phối tần số của x_i.

* Sắp thứ tự $n_1, n_2, ..., n_m$

* Tìm tần số lớn nhất: $n_k = Max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$.

* Suy ra: x_k là mốt của mẫu số liệu đó.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Điều tra về số học sinh ở 11 lớp thuộc khối 10 của trường A ta được mẫu số liệu sau:

36	43	39	38	39	37	40	42	37	44	45

Hãy xác định số trung vị.

Giải

Sắp dãy số liệu theo thứ tự tăng dần, ta được:

36, 37, 37, 38, 39, 39, 40, 42, 43, 44, 45

Vì N = 11 là số **lẻ** nên số trung vị của mẫu số liệu là số liệu thứ $\frac{11+1}{2} = 6$.

Vậy $M_e = x_6 = 39$.

Ví dụ 2: Điều tra về điểm kiểm tra học kì I của 10 học sinh ta được dãy điểm số sau:

4	6	5	5	8	8	6	10	10	9

Hãy xác định số trung vị.

Giải

Sắp dãy số liệu theo thứ tự tăng dần, ta được:

4, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 10.

Vì N = 10 là số **chẵn** nên số trung vị của mẫu số liệu là trung bình cộng của số liệu thứ 5 và thứ 6.

Vậy $M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{6+8}{2} = 7$.

Ví dụ 3: Một cửa hàng bán giày, thống kê số giày bán ra trong một tháng theo các cỡ khác nhau và có bảng tần số sau:

Cỡ giày (x)	35	36	37	38	39	40	41	42
Số giày bán được (n)	14	43	180	168	186	30	7	9

Tìm mốt của mẫu số liệu này.

Giải

Ta thấy giá trị x = 39 có tần số 186 là tần số lớn nhất.

Vậy mốt của mẫu số liệu trên là $M_0 = 39$.

Ví dụ 4: Trong một tháng, một học sinh được 20 cột điểm được sắp thứ tự như sau:

3	3	3	4	4	5	5	5	6	6
6	7	7	8	8	8	9	9	10	10

a) Hãy lập bảng phân phối tần số.

b) Tính số trung bình $\bar{x}$, trung vị M_e và mốt của mẫu số liệu trên.

Giải

a) Bảng phân phối tần số của mẫu số liệu trên là:

Điểm x	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số n	3	2	3	3	2	3	2	2	N = 20

b) + Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{3.3+4.2+5.3+6.3+7.2+8.3+9.2+10.2}{20} = 6,3.$$

+ **Số trung vị**: Sắp dãy số liệu theo thứ tự tăng dần, ta được:

3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10.

Vì N = 20 là số **chẵn** nên số trung vị của mẫu số liệu là trung bình cộng của số liệu thứ 10 và thứ 11.

Vậy $M_e = \frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{6+6}{2} = 6.$

– Mốt của mẫu số liệu trên là $M_0 \in \{3; 5; 6; 8\}$.

Vấn đề 3: Tính phương sai và độ lệch chuẩn

1. Phương pháp

a) Tính phương sai s^2:

Để tính phương sai s^2 của một mẫu số liệu $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ ta thực hiện các cách:

Cách 1:

* Tính số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$

* Tính các độ lệch: $x_i - \bar{x}$ $\left(i = \overline{1...N}\right)$

* Tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

Cách 2:

* Tính $\sum_{i=1}^{N} x_i$ và $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$

* Tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$.

➢ **Chú ý**: Nếu mẫu số liệu được cho bởi bảng phân phối tần số.

X	x_1	x_2	...	x_m	
Tần số	n_1	n_2	...	n_m	N

Thì phương sai được tính theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$

b) Tính độ lệch chuẩn s:

Độ lệch chuẩn bằng căn bậc hai của phương sai: $s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	**N = 40**

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) Số trung bình của sản lượng của 40 thửa ruộng là:

$$\bar{x} = \frac{5.20 + 8.21 + 11.22 + 10.23 + 6.24}{40} = 22{,}1 \text{ (tạ)}$$

b) ➢ **Tính phương sai:**

Cách 1:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{40}[5(20-22{,}1)^2 + 8(21-22{,}1)^2 + 11(22-22{,}1)^2 + 10(23-22{,}1)^2 + 6(24-22{,}1)^2]$$

$$= \frac{1}{40}[5(2{,}1)^2 + 8(1{,}1)^2 + 11(0{,}1)^2 + 10(0{,}9)^2 + 6(1{,}9)^2] = \frac{6160}{4000} = 1{,}54.$$

Cách 2: Ta có:

$$* \sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 5.20 + 8.21 + 11.22 + 10.23 + 6.24 = 884.$$

$$* \sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 = 5.20^2 + 8.21^2 + 11.22^2 + 10.23^2 + 6.24^2 = 19598.$$

Do đó: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \frac{1}{40}.19598 - \frac{1}{40^2}884^2 = 1{,}54.$

➢ **Tính độ lệch chuẩn:**

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}54} \approx 1{,}24.$$

Ví dụ 2: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho ở trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

a) Tính số trung bình.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) **Tính số trung bình**:

$$\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1.9 + 1.10 + 3.11 + 5.12 + 8.13 + 13.14 + 19.15 + 24.16 + 14.17 + 10.18 + 2.19$$

$$= 1523 \Rightarrow \text{Số trung bình là } \bar{x} = \frac{1523}{100} = 15{,}23.$$

b) **Tính phương sai**:

Ta có: $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1523$ và $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i^2 = 23591$

$$\Rightarrow \text{Phương sai là } s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}.23591 - \frac{1}{100^2}(1523)^2 \approx 3{,}96$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{s^2} \approx 1{,}99$.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Doanh thu của 10 sạp hàng trong một ngày ở khu chợ A (đơn vị: triệu đồng) như sau:

2	2	25	2	10	100	2	10	4	12

Tìm số trung bình và số trung vị. Số nào làm đại diện tốt hơn?

Bài 2: Theo dõi số áo bán ra của 9 loại áo ở một cửa hàng người ta có dãy số liệu sau (đơn vị: chiếc)

42	52	23	36	48	42	40	48	42

Tìm số trung bình và số trung vị, mốt và độ lệch chuẩn.

Bài 3: Trong một kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20), kết quả được cho ở bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N = 100

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị.

c) Tìm mốt.

Bài 4: 179 củ khoai tây được chia thành 9 lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị: gam).

Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Khoảng	Tần số
1	[10;19]	1
2	[20; 29]	14
3	[30; 39]	21
4	[40; 49]	73
5	[50; 59]	42
6	[60; 69]	13
7	[70; 79]	9
8	[80; 89]	4
9	[90; 99]	2

a) Tính khối lượng trung bình của một củ khoai tây.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 5: Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

a) Tìm số xe trung bình bán được trong một ngày.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 6: Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hằng tháng của một cửa hàng A trong năm 2006. Đơn vị: triệu đồng.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 7: Theo dõi số bao xi măng bán ra trong 23 ngày tại một cửa hàng bán vật liệu xây dựng ta có bảng sau:

47	54	43	50	61	36	65	54
43	50	62	59	36	45	45	33
53	67	21	45	50	36		

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 8: Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ôtô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A:

60; 65; 70; 68; 62; 75; 80; 83; 82; 69; 73; 75; 85; 72; 67;
88; 90; 85; 72; 63; 75; 76; 85; 84; 70; 61; 60; 65; 73; 76.

Con đường B:

76; 64; 58; 82; 72; 70; 68; 75; 63; 67; 74; 70; 79; 80; 73;
75; 71; 68; 72; 73; 79; 80; 63; 62; 71; 70; 74; 69; 60; 63.

a) Tìm số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ôtô trên mỗi con đường A, B.

b) Theo em thì lái xe trên con đường nào an toàn hơn ?

Bài 9: Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau đây:

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ nhất:

645	650	645	645	652	647
650	645	650	644	630	654
650	635	635	647	652	643

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ hai:

640	650	645	643	650	642
640	640	645	641	650	651
650	645	650	644	652	643

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm cá thứ nhất với các lớp là: [630; 635), [635; 640), ..., [650; 655].

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm cá thứ hai với các lớp là: [638; 642), [642; 646), ..., [650; 654].

c) Mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a) bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

d) Mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a) bằng cách vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số.

e) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã lập được. Từ đó xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

Bài 10: Hai xạ thủ cùng tập bắn, mỗi người bắn 10 viên đạn vào bia. Kết quả thu được như sau:

Điểm số của xạ thủ A

8	9	10	8	6	9	10	7	10	8

Điểm số của xạ thủ B

8	10	7	8	7	9	10	9	10	8

a) Tìm số trung bình, số trung vị, tìm phương sai và độ lệch chuẩn của điểm số của hai xạ thủ.

b) Trong lần bắn này, xạ thủ nào bắn tốt hơn?

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

Bài 1: Để điều tra số xe máy trong một gia đình ở một phường A, người ta đã chọn ra 50 gia đình, thống kê số xe máy của gia đình đó và thu được mẫu số liệu như sau:

1	2	0	3	1	2	1	3	2	1
4	0	1	2	3	0	1	1	2	0
1	4	3	1	2	1	2	2	2	1
0	1	4	2	2	3	3	2	1	1
1	1	0	1	1	2	4	3	3	2

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu trong mẫu số liệu trên và tìm tần số, tần suất của chúng.

Bài 2: Khi điều tra về số cây trồng của mỗi lớp trong dịp phát động phong trào Tết trồng cây, người ta thu được bảng số liệu như sau từ 20 lớp trong một trường học:

35	30	28	30	30	30	35	28	30	30
35	50	35	50	30	35	35	30	30	50

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu trong mỗi số liệu trên và tìm tần số, tần suất của chúng.

Bài 3: Hàng ngày, một học sinh thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường và thực hiện điều đó trong 20 ngày. Kết quả thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: phút)

21	19	20	17	18	20	19	18	20	19
17	18	17	20	21	19	19	18	20	18

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?

c) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số, tần suất của chúng.

Bài 4: Để điều tra chiều cao của học sinh nữ lớp 10 trong một trường THPT, người ta đo chiều cao của 30 học sinh nữ và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: cm)

151	160	159	152	160	158	157	162	165	165
152	150	150	160	160	152	154	156	156	160
164	162	150	152	165	165	159	157	162	150

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm 8 lớp với các nửa khoảng:

[150; 152); [152; 154); ...; [164; 166).

Bài 5: Một nhóm nghiên cứu an toàn giao thông ghi tốc độ (km/giờ) của 40 chiếc xe máy đi qua như sau:

28	21	29	31	36	28	40	41	31	29
41	56	40	20	35	28	52	55	50	47
31	30	35	38	25	57	32	28	40	26
20	50	40	42	30	58	29	31	59	35

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến phần nghìn) gồm 8 lớp:

[20; 25); [25; 30); ...; [55; 60).

Bài 6: Thống kê tuổi nghề của 50 giáo viên trong một trường THPT người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

8	4	2	32	1	4	25	28	30	31
2	3	25	26	6	15	12	2	21	13
6	2	34	26	5	10	17	20	4	4
25	15	11	10	9	4	5	14	13	10
8	2	30	10	6	7	8	9	3	14

a) Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm 7 lớp với các nửa khoảng [1; 5); [5; 10); [10; 15); ...; [30; 35).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 7: Kết quả của điểm thi môn Toán của 30 học sinh được cho trong mẫu số liệu sau:

9	8,5	5,5	6	4,5	6	6,5	5,5	7	8
2	1,5	0,5	1	6	6,5	5	8	9	9,5
6	6,5	5	5,5	3	3,5	6	4	5	5,5

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, sử dụng năm lớp: [0; 2); [2; 4); [4; 6); [6; 8); [8; 10)

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 8: Doanh thu của 20 công ty sản xuất ô tô trong năm vừa qua được cho như sau (đơn vị: triệu đô la Mĩ)

8	32	54	12	50	80	90	64	54	52
20	43	70	56	20	12	7	14	22	35

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp sử dụng 5 lớp: [0; 20); [20; 40); [40; 60); [60; 80); [80; 100).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ đường gấp khúc tần số.

Bài 9: Điều tra về số tiền mua sách trong một năm của 50 học sinh trong một trường THPT ta có mẫu số liệu sau (đơn vị: nghìn đồng)

104	48	42	54	76	240	150	670	210	140
520	35	80	75	310	450	210	310	120	70
120	810	98	70	215	110	125	128	312	55
640	210	120	70	810	940	215	170	120	150
450	80	140	150	350	245	140	110	750	710

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 10 lớp: [0; 100); [100; 200); ...; [900; 1000).

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Bài 10: Thống kê điểm trắc nghiệm môn Tiếng Anh của 40 học sinh, người ta thu được mẫu số liệu sau (thang điểm 100)

56	42	78	45	55	66	82	34	25	30
90	72	98	62	64	31	45	28	72	88
56	58	62	65	31	74	72	90	92	40
52	56	55	82	22	32	46	60	68	54

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, sử dụng các lớp [20; 30); [30; 40); ...; [90; 100).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

Bài 11: Điểm kiểm tra môn toán của 10 học sinh trong một tổ học tập như sau:

5	4	10	5	5	3	5	6	5	10

a) Tìm số trung bình và số trung vị.

b) Số nào làm đại diện cho nhóm tốt hơn?

Bài 12: Điều tra về tuổi nghề của 20 công nhân trong một phân xưởng, người ta thu được mẫu số liệu sau:

20	18	4	5	6	2	6	5	8	5
6	4	5	5	1	15	16	5	5	4

a) Tìm số trung bình và số trung vị.

b) Số nào làm đại diện tốt hơn?

Bài 13: Tiền cước phí điện thoại di động một tháng 10 thầy cô giáo trong một trường học được ghi lại như sau: (đơn vị: nghìn đồng)

75	120	60	120	82	90	92	210	80	120

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 14: Điểm kiểm tra môn Thể dục của hai học sinh A và B được ghi lại như sau:

A	7	8	6	7	7	9	5	7
B	10	4	9	5	7	3	9	9

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt của mỗi học sinh.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

c) Học sinh nào có kết quả ổn định hơn?

Bài 15: Số tiền nước phải trả một tháng của 30 hộ trong một phường được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (đơn vị: nghìn đồng)

Lớp	Tần số
[0; 100)	8
[100; 200)	12
[200; 300)	5
[300; 400)	3
[400; 500)	2
	N = 30

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

Bài 16: Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 50 khách hàng mua sắm trong một ngày. Số tiền được ghi trong bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Tần số
[0; 200)	12
[200; 400)	28
[400; 600)	5
[600; 800)	3
[800; 1000)	2
	N = 50

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 17: Trọng lượng của 40 học sinh lớp 10 (đơn vị: kg) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp	Tần số
[40; 45)	9
[45; 50)	18
[50; 55)	7
[55; 60)	6
	N = 40

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 18: Một cửa hàng ăn ghi lại số tiền (nghìn đồng) mà mỗi khách hàng trả cho cửa hàng. Các số liệu được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp	Tần số
[0; 100)	25
[100; 200)	70
[200; 300)	60
[300; 400)	30
[400; 500)	15
	N = 200

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 19: Điểm trung bình thi học kì môn Văn và sĩ số của học sinh khối 10, 11, 12 của một trường được thống kê trong bảng sau:

	Khối 10	Khối 11	Khối 12
Điểm TB môn Văn	6,4	6,8	7,2
Sĩ số	610	540	520

Tính điểm trung bình của học sinh toàn trường.

Bài 20: Trong một cuộc thi ca nhạc có 5 ca sĩ (mã số 1, 2, 3, 4, 5) vào chung kết, người ta tiến hành thăm dò ý kiến của khán giả. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu ủng hộ dành cho các ca sĩ trên:

Ca sĩ	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	3212	1024	1830	2544	1620	10230

a) Tìm mốt của bảng phân bố tần số đã cho.

b) Vẽ biểu đồ cột bảng phân bố tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

c) Hãy xếp hạng 5 ca sĩ trên theo số phiếu ủng hộ của khán giả.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5
THỐNG KÊ

§1. MỘT VÀI KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Bài 1: a) Dấu hiệu: Số con trong 1 gia đình.
Đơn vị điều tra: Một gia đình.
Kích thước mẫu: 60.
b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu là: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Bài 2: a) Dấu hiệu: Lượng nước tiêu thụ trong một tháng của một gia đình.
Đơn vị điều tra: Một gia đình.
Kích thước mẫu là: 40.
b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu là:
12, 13, 15, 16,18,19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 40, 41, 42, 43, 50, 51.

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

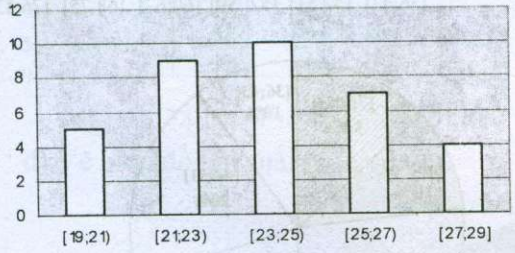
Bài 1: Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp:

Lớp	[50;124]	[125;199]	[200;274]	[275;349]	[350;424]	[425;499]	
Tần số	3	5	7	5	3	2	25
Tần suất %	12	20	28	20	12	8	100 %

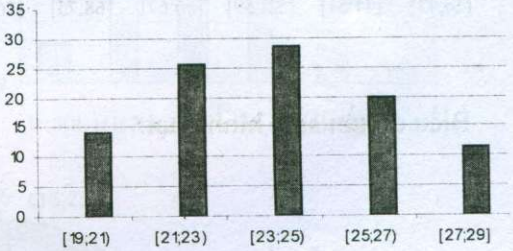
Bài 2: a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Lớp	[19;21)	[21;23)	[23;25)	[25;27)	[27; 29]	
Tần số	5	9	10	7	4	N = 35
Tần suất %	14,3	25,7	28,6	20,0	11,4	100 %

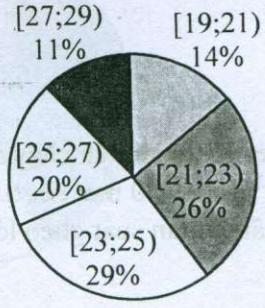
b) Biểu đồ tần số hình cột:



Biểu đồ tần suất hình cột



Biểu đồ tần suất hình quạt.



c) Những ngày bạn An đi đến trường từ 21 đến dưới 25 phút chiếm: 54.3 %.

Bài 3: a) Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp:

Lớp của độ dài (cm)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50]	Cộng
Tần số	8	18	24	10	60
Tần suất	13,3	30,0	40,0	16,7	100%

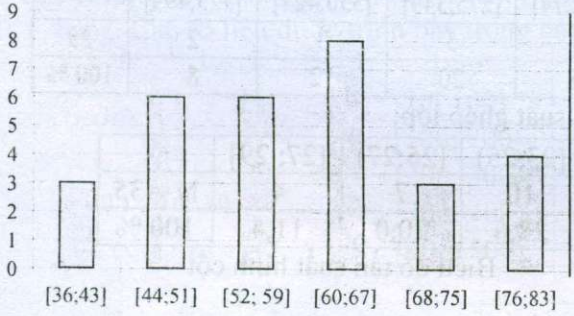
b) Số lá có độ dài dưới 30cm chiếm 43.3 %.

Số lá có độ dài từ 30cm đến 50cm chiếm 56.7%

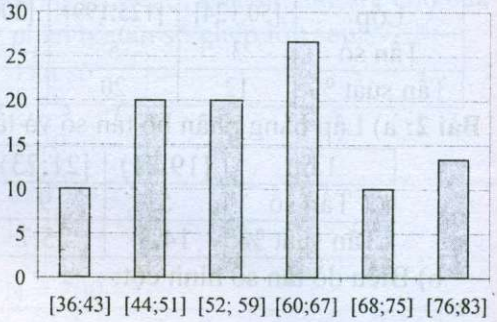
Bài 4: a) Bảng phân bố tần số và tần suất (chính xác đến phần nghìn) ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất
[36;43]	3	10.000
[44;51]	6	20.000
[52; 59]	6	20.000
[60;67]	8	26.667
[68;75]	3	10.000
[76;83]	4	13.333
	30	100 %

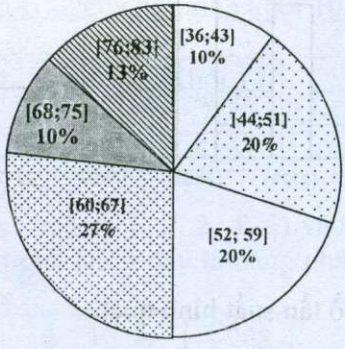
b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột



Biểu đồ tần suất hình cột



Biểu đồ tần suất hình quạt:



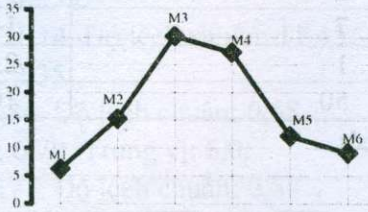
Bài 5: a) Nhận xét về thành tích chạy 50m của học sinh lớp 10A:

Đa số 84.7 % chạy 50 mét hết 6.5 giây đến 8.5 giây.

b) Bảng phân bố tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần suất
[6,0;6,5)	6.2
[6,5;7,0)	15.2
[7,0;7,5)	30.2
[7,5;8,0)	27.2
[8,0;8,5)	12.1
[8,5;9,0)	9.1

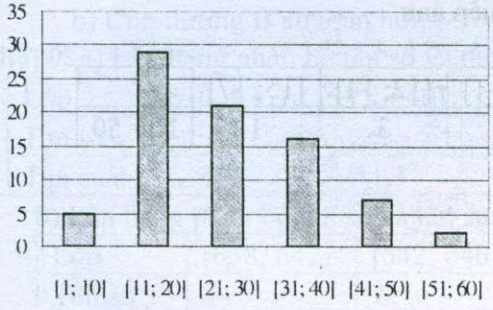
Đường gấp khúc tần suất.



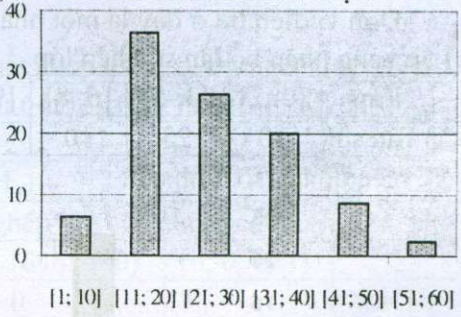
Bài 6: a) Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số – tần suất

Lớp	[1;10]	[11;20]	[21;30]	[31;40]	[41;50]	[51;60]	
Tần số	5	29	21	16	7	2	80
Tần suất	6,25	36,25	26,25	20	8,75	2,5	100%

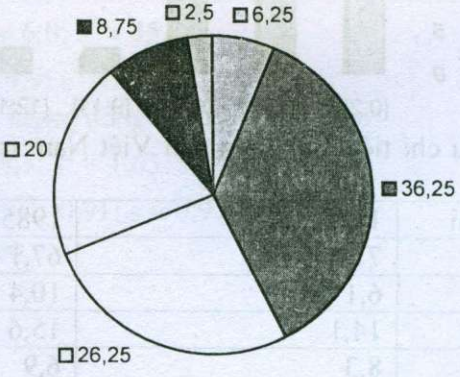
b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.



c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.



d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

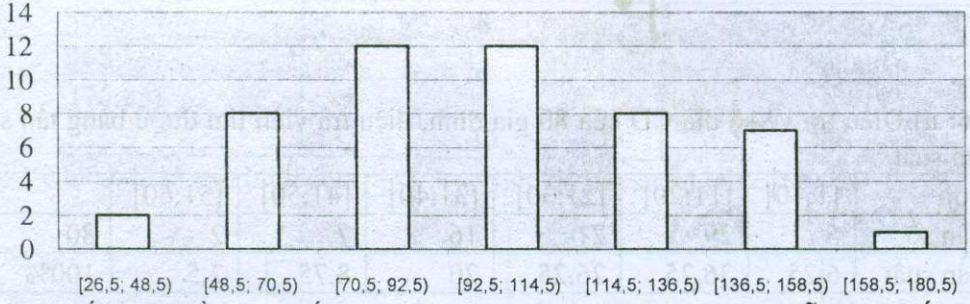


Bài 7: a) Dấu hiệu điều tra là doanh thu của mỗi cửa hàng trong một tháng.
Đơn vị điều tra là một cửa hàng của công ty.

b) Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất %
[26,5; 48,5)	2	4
[48,5; 70,5)	8	16
[70,5; 92,5)	12	24
[92,5; 114,5)	12	24
[114,5; 136,5)	8	16
[136,5; 158,5)	7	14
[158,5; 180,5)	1	2
	50	100 %

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

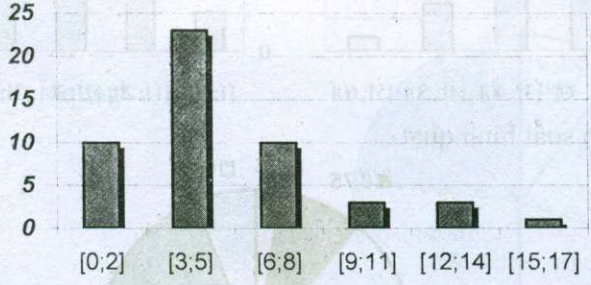


Bài 8: a) Dấu hiệu điều tra là số cuộn phim chụp trong tháng trước của mỗi nhà nhiếp ảnh.
Đơn vị điều tra ở đây là một nhà nhiếp ảnh.

b) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp	[0; 2]	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]	
Tần số	10	23	10	3	3	1	N = 50

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.



Bài 9: Bảng cơ cấu chi tiêu của nhân dân Việt Nam trong năm 1975 và năm 1985 (đơn vị %).

Khoản chi	1975	1985
Ăn	71,5	67,1
Mặc	6,1	10,4
Mua sắm	14,1	15,6
Chi khác	8,3	6,9

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

Bài 1: $\bar{x}$ =16,9; M_e = 7; $\bar{x}$ đại diện tốt hơn.

Bài 2: $\bar{x} \approx 41,4$; $M_e = 42$; $M_0 = 42$; $s \approx 8.0$; $s^2 \approx 63,4$.

Bài 3: a) Số trung bình: 15,23.

b) Số trung vị: 15.

c) Mốt: 19,0.

Bài 4: a) Trung bình cộng: 48,35.

b) Phương sai $s^2 = 131,14$. Độ lệch chuẩn: 11,45.

Bài 5: a) Trung bình cộng: 2,35.

b) Phương sai $s^2 = 0,34$. Độ lệch chuẩn: 0,58.

Bài 6: a) Trung bình cộng: 6,79. Trung vị: 6,0.

b) Phương sai $s^2 = 0,77$. Độ lệch chuẩn: 0,88.

Bài 7: a) Trung bình cộng: 48,39. Trung vị: 50.

b) Phương sai $s^2 = 127,52$. Độ lệch chuẩn: 11,29.

Bài 8: a) **Con đường A:**

Trung bình cộng: 73,63. Trung vị: 73.

Phương sai: 77,34. Độ lệch chuẩn: 8,79

Con đường B:

Trung bình cộng: 70,70. Trung vị: 71.

Phương sai: 39,53. Độ lệch chuẩn: 6,29

b) Con đường B an toàn hơn.

Bài 9: a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm cá thứ nhất:

Lớp	[630; 635)	[635; 640)	[640; 645)	[645; 650)	[650; 655]	
Tần số	1	2	2	6	7	N = 18
Tần suất	5,6	11,1	11,1	33,3	38,9	100%

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm cá thứ hai:

Lớp	[638; 642)	[642; 646)	[646; 650)	[650; 654)	
Tần số	4	7	0	7	N = 18
Tần suất	22,2	38,9	0	38,9	100%

e) Nhóm 1: $\bar{x} \approx 646,9$; $s \approx 6,0$; $s^2 \approx 35,8$.

Nhóm 2: $\bar{x} \approx 646,2$; $s \approx 4,9$; $s^2 \approx 23,5$.

Nhóm cá thứ hai có khối lượng đồng đều hơn.

Bài 10: a) * Xạ thủ A: $\bar{x} = 8,5$; $s^2 = 1,65$; $s = 1,29$.

* Xạ thủ B: $\bar{x} = 8,4$; $s^2 = 0,91$; $s = 0,95$.

b) Xạ thủ B bắn tốt hơn.

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Bài 1: a) Dấu hiệu: số xe máy trong mỗi gia đình.

Đơn vị điều tra: Một gia đình. Kích thước mẫu là 50.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tần số, tần suất:

Số xe máy	0	1	2	3	4	
Tần số	6	18	14	8	4	N = 50
Tần suất (%)	12,0	36,0	28,0	16,0	8,0	100%

Bài 2: a) Dấu hiệu: số cây trồng của mỗi lớp.

Đơn vị điều tra: Một lớp. Kích thước mẫu là 20.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tần số, tần suất:

Số cây	28	30	35	50	
Tần số	2	9	6	3	N = 20
Tần suất (%)	10,0	45,0	30,0	15,0	100%

Bài 3: a) Dấu hiệu: Thời gian đi từ nhà đến trường của HS.

Đơn vị điều tra: Một ngày. Kích thước mẫu là 20.

b) 5

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tần số, tần suất:

Số pht	17	18	19	20	21	
Tần số	3	5	5	5	2	N = 20
Tần suất (%)	15,0	25,0	25,0	25,0	10,0	100%

Bài 4: Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất
[150;152)	5	16,7
[152;154)	4	13,3
[154;156)	1	3,3
[156;158)	4	13,3
[158;160)	3	10,0
[160;162)	5	16,7
[162;164)	3	10,0
[164;166)	5	16,7
	N = 30	100%

Bài 5: Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

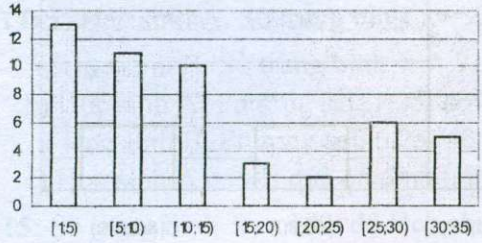
Lớp	Tần số	Tần suất
[20;25)	3	7,5
[25;30)	9	22,5
[30;35)	6	15
[35;40)	6	15
[40;45)	7	17,5
[45;50)	1	2,5
[50;55)	3	7,5
[55;60)	5	12,5
Tổng	40	100%

Bài 6:

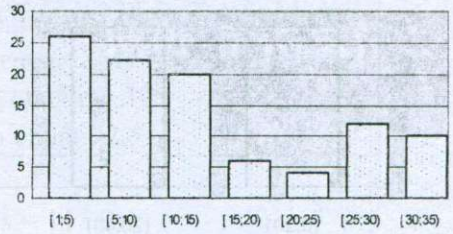
a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	[1;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	
Tần số	13	11	10	3	2	6	5	N = 50
Tần suất (%)	26	22	20	6	4	12	10	100%

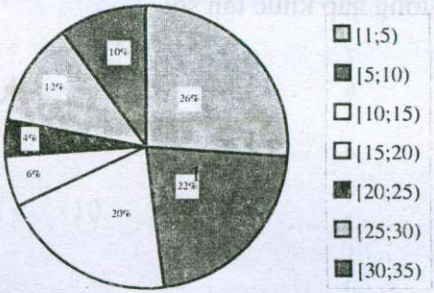
b) Biểu đồ tần số hình cột



c) Biểu đồ tần suất hình cột:



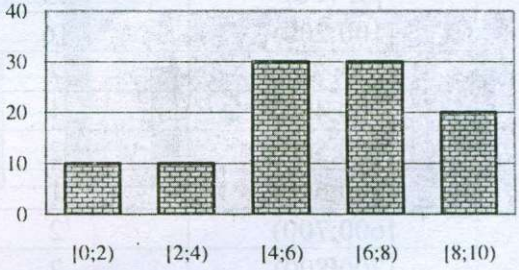
d) Biểu đồ tần suất hình quạt:



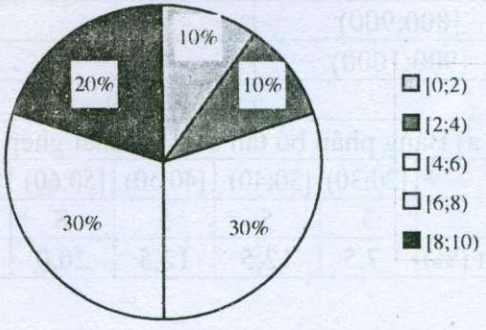
Bài 7: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	
Tần số	3	3	9	9	6	N=30
Tần suất (%)	10	10	30	30	20	100%

b) Biểu đồ tần suất hình cột:



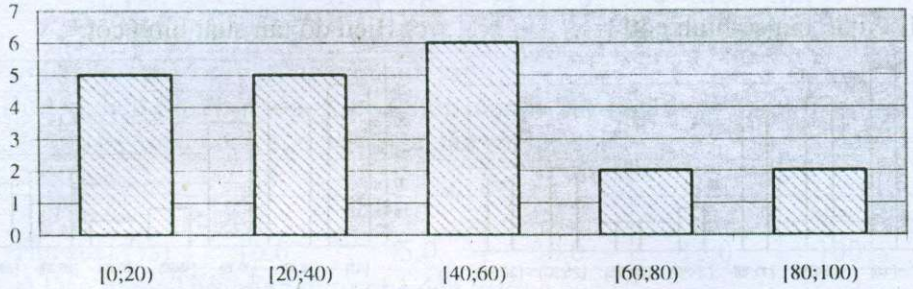
c) Biểu đồ tần suất hình quạt:



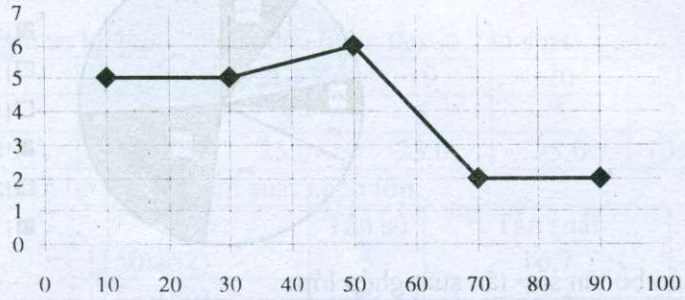
Bài 8: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)	
Tần số	5	5	6	2	2	N = 20
Tần suất (%)	25	25	30	10	10	100%

b) Biểu đồ tần số hình cột.



c) Đường gấp khúc tần số:



Bài 9: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất
[0; 100)	13	26
[100;200)	16	32
[200; 300)	7	14
[300;400)	4	8
[400;500)	2	4
[500;600)	1	2
[600;700)	2	4
[700;800)	2	4
[800;900)	2	4
[900;1000)	1	2
	50	100

Bài 10: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)	
Tần số	3	5	5	8	7	5	3	4	N=40
Tần suất (%)	7,5	12,5	12,5	20,0	17,5	12,5	7,5	10,0	100%

Bài 11: a) Số trung bình $\bar{x} = 5,8$ và số trung vị $M_e = 5$.

b) Số trung bình.

Bài 12: a) Số trung bình: 7,25 và số trung vị: 5

Bài 13: a) Số trung bình: 104,9;

Số trung vị: 91; mốt: 120.

b) $s^2 = 1617,3$ và $s = 40,22$.

Bài 14: a) Học sinh A: Số trung bình $\bar{x} = 7$, số trung vị $M_e = 7$, mốt $M_0 = 7$.

Học sinh B: Số trung bình $\bar{x} = 7$, số trung vị $M_e = 8$, mốt $M_0 = 9$.

b) Học sinh A: Phương sai: 1,25; độ lệch chuẩn: 1,12

Học sinh B: Phương sai: 6,25; độ lệch chuẩn: 2,5

c) Học sinh A có kết quả ổn định hơn.

Bài 15: Số trung bình $\bar{x} = 180$; độ lệch chuẩn $s = 115,9$.

Bài 16: Số trung bình $\bar{x} = 320$;

Phương sai $s^2 = 37200$; độ lệch chuẩn $s = 192,9$.

Bài 17: Số trung bình $\bar{x} = 48,75$.

Phương sai $s^2 = 23,4375$; độ lệch chuẩn $s = 4,8412$.

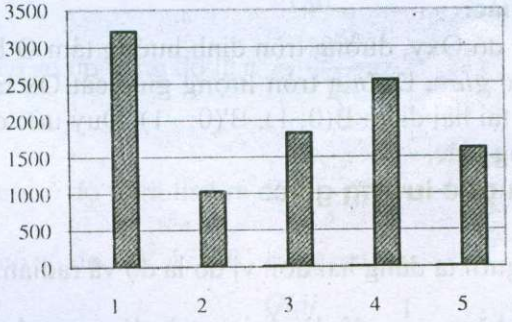
Bài 18: Số trung bình $\bar{x} = 220$.

Phương sai $s^2 = 12100$; độ lệch chuẩn $s = 110$.

Bài 19: $\bar{x} = 6,7784$.

Bài 20: a) Mốt là ca sĩ mã số 1.

b) Biểu đồ cột:



c) Ca sĩ 1; Ca sĩ 4, Ca sĩ 3, Ca sĩ 5, Ca sĩ 2.

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Khái niệm cung và góc lượng giác:

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác:

▸ *Đường tròn định hướng* là một đường tròn trên đó đã chọn một chiều chuyển động cho các điểm gọi là chiều dương và chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Ta quy ước chiều dương là chiều quay ngược chiều quay của kim đồng hồ.

▸ Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A, B. Một điểm M di động trên đường tròn theo một chiều nhất định từ A đến B tạo nên một cung gọi là *cung lượng giác* có điểm đầu A và điểm cuối B. Có vô số cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối là B. Kí hiệu là $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

2. Góc lượng giác:

Trên đường tròn định hướng tâm O, cho một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ và điểm M di động trên đường tròn. Khi điểm M di động từ A tới B tạo nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ thì tia OM tạo nên một *góc lượng giác*, có tia đầu là OA và tia cuối là OB. Kí hiệu là (OA, OB).

3. Đường tròn lượng giác:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1 được gọi là *đường tròn lượng giác*. Đường tròn lượng giác cắt Ox tại hai điểm A(1; 0), A'(–1; 0) và cắt trục Oy tại hai điểm B(0; 1), B'(0; –1). Quy ước điểm A(1; 0) là điểm gốc của đường tròn lượng giác.

II. Số đo của cung và góc lượng giác:

1. Đơn vị đo:

Để đo góc và cung người ta dùng hai đơn vị đo là độ và radian, kí hiệu là rad.

▸ Cung có có độ dài bằng $\frac{1}{360}$ độ dài đường tròn là cung có số đo 1 độ.

▸ Cung có có độ dài bằng bán kính đường tròn là cung có số đo 1 radian.

Như vậy:

Đường tròn có số đo là 360^0 hay có số đo là 2π (radian).

Do đó ta có mối liên hệ giữa độ và radian là:

$180^0 = \pi$ (radian).

2. Công thức về độ dài cung:

Cung có số đo α (radian) của đường tròn bán kính R, có độ dài là $l = R.\alpha$.

3. Số đo của cung lượng giác:

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu A và cùng điểm cuối B là:

$$\text{sđ } \overset{\curvearrowright}{AB} = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A và điểm cuối là B.

Khi đo bằng độ thì ta có

$$\text{sđ } \overset{\curvearrowright}{AB} = a^0 + k360^0,\ k \in \mathbb{Z}$$

trong đó a^0 là số đo độ của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A và điểm cuối là B.

4. Số đo của góc lượng giác:

Số đo của các góc lượng giác (OA, OB) là số đo của cung $\overset{\curvearrowright}{AB}$ tương ứng

$$\text{sđ}(OA, OB) = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

trong đó α là số đo của một góc lượng giác tùy ý có tia đầu là OA và tia cuối là OB.

Khi đo bằng độ thì ta có $\text{sđ}(OA, OB) = a^0 + k360^0,\ k \in \mathbb{Z}$, trong đó a^0 là số đo độ của một góc lượng giác tùy ý có tia đầu là OA và tia cuối là OB.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Đổi đơn vị đo góc và cung

1. Phương pháp:

Dùng mối liên hệ $180^0 = \pi$ rad và quy tắc tam suất. Ta có:

- Cung a^0 có số đo bằng radian là $\alpha = \frac{\pi}{180}.\alpha$.
- Cung a (rad) có số đo bằng độ là $a^0 = \frac{180^0}{\pi}.\alpha$.

2. Ví dụ:

a) Đổi các cung có số đo từ radian ra độ: $\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{5};\ 4$.

b) Đổi các cung có số đo $70^0, 12^0 30'$ sang radian.

Giải

a) Ta có:

$$* \ \frac{2\pi}{3}\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}.\frac{2\pi}{3} = 120^0$$

$$* \ \frac{3\pi}{5}\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}.\frac{3\pi}{5} = 108^0$$

$$* \ 4\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}.4 = \frac{720^0}{\pi}.$$

b) Ta có

$* \ 70^0 = \frac{\pi}{180}.70 = \frac{7\pi}{18}(\text{rad})$

$* \ 12^0 30' = \frac{\pi}{180}.\left(12 + \frac{30}{60}\right) = \frac{\pi}{180}.\frac{25}{2} = \frac{5\pi}{72}(\text{rad})$.

3. Bài tập:

1. Đổi số đo của các cung sau đây ra radian:

$20^0, 12^0, 54^0, 72^0, 108^0, 315^0$.

2. Đổi số đo của các cung sau đây thành radian:

$20^0\ 15'; 70^0\ 10'; 75^0\ 54'; 100^0\ 25'$.

3. Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây:

$\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{4}; 1,25\pi; 2,25; 314$.

***Vấn đề 2:* Tính độ dài của cung tròn**

1. Phương pháp:

Cung có số đo α (rad) của đường tròn bán kính R có độ dài là:

$l = R.\alpha$.

2. Ví dụ:

Kim giờ của đồng hồ dài 7cm, kim phút dài 10cm. Tính quãng đường mũi kim phút, kim giờ đi được trong 30 phút.

Giải

Trong 30 phút, kim phút quay được một góc π (rad).

Vậy quãng đường đi được của kim phút là $l_P = 10.\pi = 10\pi$ (cm).

Trong 30 phút, kim giờ quay được một góc $\frac{\pi}{12}$ (rad).

Vậy quãng đường đi được của kim giờ là: $l_G = 7.\frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ (cm).

3. Bài tập:

1. Trên đường tròn có bán kính 20cm, tìm độ dài các cung có số đo sau đây, tính chính xác đến hàng phần trăm:

$\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 70^0$.

2. Biết độ dài của vòng kinh tuyến là 40000km, hỏi bán kính của Trái Đất là bao nhiêu km?

3. Trên đường tròn định hướng có bán kính 30cm, cho ba điểm A, B, C với sđ $\overset{\curvearrowright}{AB} = 25^0$, sđ $\overset{\curvearrowright}{AC} = -35^0$. Tính độ dài cung hình học BC.

Vấn đề 3: **Mối liên hệ giữa góc hình học và góc lượng giác**

1. Phương pháp:

➢ Hai góc lượng giác có số đo khác nhau $k2\pi$ (hay $k360^0$) thì có cùng tia đầu và tia cuối.

➢ Góc lượng giác có tia đầu và tia cuối là hai tia của góc hình học uOv thì tổng hay hiệu số đo của góc lượng giác và góc hình học là $k2\pi$ (hay $k\ 360^0$), với k là số nguyên.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo $\frac{\pi}{5}$.

Hỏi trong các số $\frac{6\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}, -\frac{11\pi}{5}, \frac{31\pi}{5}, \frac{-14\pi}{5}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Giải

Ta có:

* $\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \pi$ nên $\frac{6\pi}{5}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $\frac{9\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$ nên $\frac{9\pi}{5}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $-\frac{11\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = -\frac{12\pi}{5}$ nên $-\frac{11\pi}{5}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $\frac{31\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 6\pi$ nên $\frac{31\pi}{5}$ là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $-\frac{14\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = -3\pi$ nên $-\frac{14\pi}{5}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Ví dụ 2: Tìm số đo của góc hình học uOv, biết góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo là:

a. $\frac{9\pi}{7}$ b. 750^0

Giải

a) Gọi góc hình học có số đo là $x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, ta có:

$$x + \frac{9\pi}{7} = k2\pi \quad \text{hay} \quad x - \frac{9\pi}{7} = k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$\Leftrightarrow x = k2\pi - \frac{9\pi}{7}$ hay $x = k2\pi + \frac{9\pi}{7}$.

- $0 \leq k2\pi - \frac{9\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{9}{14} \leq k \leq \frac{16}{14} \Leftrightarrow k = 1$ (vì k nguyên)
- $0 \leq k2\pi + \frac{9\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9}{14} \leq k \leq -\frac{2}{14}$: không có giá trị k nguyên nào thỏa.

Vậy góc hình học uOv có số đo là $\frac{5\pi}{7}$.

b) Gọi góc hình học có số đo là x^0 $(0 \leq x \leq 180)$, ta có:

$x + 750 = k360$ hay $x - 750 = k360$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow$ $x = k360 - 750$ hay $x = k360 + 750$

- $0 \leq k360 - 750 \leq 180 \Leftrightarrow \frac{75}{36} \leq k \leq \frac{93}{36}$: không có giá trị k nguyên nào thỏa.
- $0 \leq k360 + 750 \leq 180 \Leftrightarrow -\frac{75}{36} \leq k \leq -\frac{57}{36} \Leftrightarrow k = -2$ (vì k nguyên).

Vậy góc hình học uOv có số đo là 30^0.

3. Bài tập:

1. Cho góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo $\frac{\pi}{6}$.

Hỏi trong các số $\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}, \frac{-35\pi}{6}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

2. Tìm số đo của góc hình học uOv, biết góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo là:

a. $\frac{13\pi}{3}$ b. 1140^0

Vấn đề 4: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

1. Phương pháp:

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo là α lên đường tròn lượng giác ta làm như sau:

* Chọn điểm gốc là A(1; 0).

* Điểm cuối M của cung được xác định bởi $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$.

Chú ý:

* Nếu ta có $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k\frac{2\pi}{n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ thì sẽ có n điểm ngọn.

* Hai cung có số đo hơn kém $k2\pi$ có cùng điểm ngọn.

* Chúng ta thường viết số đo cung $\overset{\curvearrowright}{AM}$ dưới dạng sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi$ với $(0 \leq |\alpha| \leq \pi)$ khi đó M chính là điểm ngọn của cung có số đo là α.

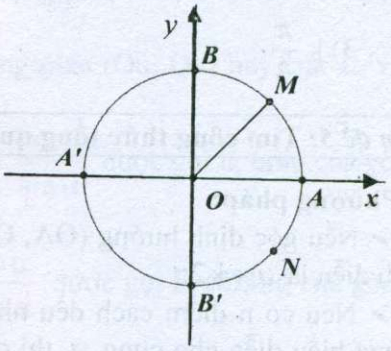
2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của các cung lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{25\pi}{4}$ b) -765^0.

Giải

a) Ta có $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3.2\pi$



$\Rightarrow$ Điểm ngọn M của cung $\frac{25\pi}{4}$ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

b) Ta có: $\overset{\curvearrowright}{AN} = -765^0 = -45^0 + (-2).360^0$

$\Rightarrow$ Điểm ngọn N của cung -765^0 trùng với điểm ngọn của cung -45^0.

$\Rightarrow$ N là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB'}$.

Ví dụ 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo sau: $\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giải

Ta có: $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{4}$ nên có 4 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

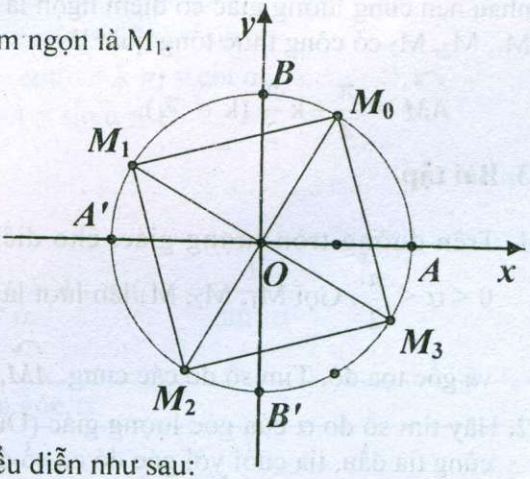
Khi k = 0 thì ta có $\overset{\curvearrowright}{AM_0} = \frac{\pi}{3}$ có điểm ngọn là M_0.

Khi k = 1 thì ta có $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ có điểm ngọn là M_1.

Khi k = 2 thì ta có $\overset{\curvearrowright}{AM_2} = \frac{\pi}{3} + \pi$ có điểm ngọn là M_2.

Khi k = 3 thì ta có $\overset{\curvearrowright}{AM_3} = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}$ có điểm ngọn là M_3.

Khi k = 4 thì ta có $\overset{\curvearrowright}{AM_4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ có điểm ngọn là M_4 trùng với M_0.



Các điểm ngọn M_0, M_1, M_2, M_3 được biểu diễn như sau:

Các điểm ngọn M_0, M_1, M_2, M_3 tạo thành một hình vuông nội tiếp đường tròn lượng giác.

3. Bài tập:

Trên đường tròn lượng giác gốc A, hãy xác định các điểm M khác nhau biết cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ có số đo là:

1) $k\pi$ **2)** $k\dfrac{\pi}{2}$

3) $k\dfrac{\pi}{3}$ **4)** $\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

***Vấn đề 5:* Tìm công thức tổng quát của các cung lượng giác**

1. Phương pháp:

➢ Nếu góc định hướng $(OA, OM)=\alpha$ thì công thức tổng quát các cung có điểm biểu diễn là $\alpha+k2\pi$.

➢ Nếu có n điểm cách đều nhau trên đường tròn lượng giác và một điểm trong chúng biểu diễn cho cung α thì công thức tổng quát của cung biểu diễn bởi n điểm đó là $\alpha+k\dfrac{2\pi}{n}$.

2. Ví dụ:

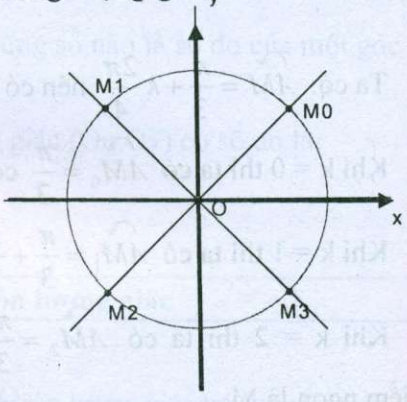
Đường phân giác các góc phần tư của mặt phẳng tọa độ cắt đường tròn lượng giác tại 4 điểm. Viết công thức tổng quát số đo những cung lượng giác có điểm cuối là điểm này.

Giải

Ta có: M_0 là điểm biểu diễn cung $\dfrac{\pi}{4}$

và 4 điểm biểu diễn là 4 điểm cách đều nhau nên cung lượng giác có điểm ngọn là M_0, M_1, M_2, M_3 có công thức tổng quát là

$$\overset{\curvearrowright}{AM}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$



3. Bài tập

1. Trên đường tròn lượng giác, cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\curvearrowright}{AM}=\alpha$ trong đó $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc tọa độ. Tìm số đo các cung $\overset{\curvearrowright}{AM_1}$, $\overset{\curvearrowright}{AM_2}$, $\overset{\curvearrowright}{AM_3}$.

2. Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov), $0\le\alpha<2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\dfrac{31\pi}{4}$ b) $-\dfrac{128\pi}{3}$

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Định nghĩa:

Gọi M(x; y) là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc α.

Hoành độ x của M được gọi là **côsin** của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu cos(Ou, Ov) = cos α = x.

Tung độ y của M được gọi là **sin** của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu sin(Ou, Ov) = sin α = y.

Nếu $\cos\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) thì tỉ số $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ được gọi là **tang** của góc α, kí hiệu là tan α.

Nếu $\sin\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) thì tỉ số $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ được gọi là **côtang** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$.

2. Dấu của tỉ số lượng giác:

Để xác định dấu của một giá trị lượng giác ta xác định vị trí của điểm ngọn của cung lượng giác tương ứng thuộc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ, từ đó suy ra dấu của giá trị lượng giác.

3. Ý nghĩa của tang và côtang:

a) Vẽ tiếp tuyến t'At của đường tròn lượng giác. Gọi T là giao điểm của tia OM với t'At, ta có $\overline{AT} = \tan\alpha$. Vì vậy ta gọi t'At là trục tang.

b) Vẽ tiếp tuyến u'Bu của đường tròn lượng giác. Gọi U là giao điểm của tia OM với u'Au, ta có $\overline{BU} = \cot\alpha$. Vì vậy ta gọi u'Bu là trục côtang.

c) Trục Ox ta còn gọi là trục côsin, trục Oy còn gọi là trục sin.

4. Các hệ thức cơ bản:

a) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ $\quad\quad$ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

b) Với mọi α, ta có: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ và $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

c) Với mọi α, ta có:

* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

* Nếu $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$ thì ta có:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha};\ 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Dấu các giá trị lượng giác của góc α

1. Phương pháp:

Để xác định dấu của một giá trị lượng giác ta thực hiện:

– Biểu diễn ngọn cung α lên đường tròn lượng giác.

– Xác định xem ngọn cung thuộc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ.

– Dùng định nghĩa giá trị lượng giác xác định dấu của các giá trị lượng giác cần xét dấu.

2. Ví dụ:

a) Xét dấu của $\sin 50^0.\cos\left(-300^0\right)$

b) Cho $0^0 < \alpha < 90^0$. Xét dấu của $\sin\left(\alpha + 90^0\right)$.

Giải

a) Ta có:

* $0^0 < 50^0 < 90^0$ nên điểm ngọn của cung 50^0 thuộc phần tư (I)

$\Rightarrow \sin 50^0 > 0$.

* $-300^0 = 60^0 - 360^0$ nên điểm ngọn của -300^0 thuộc phần tư (I)

$\Rightarrow \cos(-300^0) > 0$.

Vậy $\sin 50^0.\cos(-300^0) > 0$.

b) Ta có: $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow 0^0 + 90^0 < \alpha + 90^0 < 90^0 + 90^0$

$\Rightarrow 90^0 < \alpha + 90^0 < 180^0$.

Suy ra ngọn của cung $\alpha + 90^0$ thuộc phần tư (II). Do đó $\sin(\alpha + 90^0) > 0$.

3. Bài tập:

Xác định dấu của các biểu thức sau:

1. $M = \sin 215^0.\tan\dfrac{21\pi}{17}$.

2. $N = \cot\dfrac{3\pi}{5}.\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

3. $P = \cos\dfrac{4\pi}{5}.\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right).\tan\dfrac{4\pi}{3}.\cot\dfrac{9\pi}{5}$

4. $Q = \sin 400^0.\cos(-370^0).\tan(-200^0)$.

Vấn đề 2: Chứng minh đẳng thức lượng giác

1. Phương pháp:

- Thông thường ta biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số và các công thức lượng giác.
- Ta có thể dùng biến đổi tương đương.
- Cần chú ý các hằng đẳng thức:

  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;

  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

2. Ví dụ: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Giải

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2$

$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$

$=1-2\sin^2x\cos^2x.$

Vậy $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$ (ĐPCM).

b) $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x.\cos^2 x.(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$=1-3\sin^2 x.\cos^2 x.$

Vậy $\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x$ (ĐPCM).

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-\cos x)=\sin^2 x \Leftrightarrow 1-\cos^2x=\sin^2x$

$\Leftrightarrow \sin^2x+\cos^2x=1$ (Đúng).

Vậy $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (ĐPCM).

3. Bài tập: Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$.

2. $\cot^2 \alpha-\cos^2 \alpha=\cot^2 \alpha.\cos^2 \alpha$

3. $\tan^2 \alpha-\sin^2 \alpha=\tan^2 \alpha.\sin^2 \alpha$.

4. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$.

5. $\dfrac{\tan^2 \alpha-\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha.\tan^2 \beta}=\dfrac{\sin^2 \alpha-\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha.\sin^2 \beta}$.

6. $1+\sin a+\cos a+\tan a=(1+\cos a)(1+\tan a)$.

7. $\tan x.\tan y=\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$.

8. $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)^2=4\tan^2 a$.

9. $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x}$

10. $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}$

Vấn đề 3: **Rút gọn biểu thức lượng giác**

1. Phương pháp:

Dùng các phép biến đổi đại số, các hằng đẳng thức và các công thức lượng giác để thu gọn biểu thức đã cho.

2. Ví dụ: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin(x + k2\pi)$

b) $B = \sqrt{\sin^2 x(1+\cot x) + \cos^2 x(1+\tan x)}$

Giải

a) $A = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin x = \dfrac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sin x$

$= \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} + \sin x = \cos x - \sin x + \sin x = \cos x.$

Vậy $A = \cos x$.

b) $B = \sqrt{\sin^2 x(1+\cot x) + \cos^2 x(1+\tan x)}$

$= \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x.\cot x + \cos^2 x + \cos^2 x.tgx}$

$= \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x.\dfrac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + \cos^2 x.\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$= \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x}$

$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|.$

Vậy $B = |\sin x + \cos x|$.

3. Bài tập: Rút gọn các biểu thức:

1. $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$.

2. $B = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

3. $C = \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x$.

4. $D = \tan x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

5. $E = \dfrac{\cos x.\tan x}{\sin^2 x} - \cot x.\cos x$.

6. $F = \sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}$.

7. $G = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}\left[1 - \left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2\right]$

8. $H = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} + \cos^4 x$.

Vấn đề 4: Chứng minh một biểu thức độc lập đối với biến

1. Phương pháp:

Để chứng minh một biểu thức độc lập với biến nào đó ta rút gọn biểu thức đó để được kết quả là một biểu thức không còn chứa biến đó nữa.

2. Ví dụ: Chứng minh biểu thức sau độc lập đối với x:

$$A = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y} - \cot^2 x.\cot^2 y$$

Giải

$$A = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y} - \cot^2 x.\cot^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y} - \frac{\cos^2 x.\cos^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 x(1-\cos^2 x) - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 x.\sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y}$$

$$= \frac{\sin^2 y(\cos^2 x - 1)}{\sin^2 x.\sin^2 y} = -1$$

3. Bài tập:

Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x:

1. $A = \dfrac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}$.

2. $B = \dfrac{(1-\tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}$.

3. $C = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

4. $D = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

5. $E = \cos^6 x + 2\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x$.

6. $F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.

Vấn đề 5: Cho một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại, hay một biểu thức lượng giác

1. Phương pháp:

Dùng các công thức lượng giác biểu diễn giá trị lượng giác cần tính (hay biểu thức) về giá trị lượng giác đã biết.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$ và $180^0 < x < 270^0$. Tính $\sin x, \tan x, \cot x$.

Giải

Ta có: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{16}{25}$.

Vì $180^0 < x < 270^0$ nên $\sin x < 0$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 2: Cho $\tan x = 2$, tính $A = \frac{\sin^2 x - 2\sin x.\cos x}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$.

Giải

Cách 1: Chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$: $A = \frac{\tan^2 x - 2\tan x}{1 + 3\tan^2 x}$.

Thay tanx = 2 vào ta được A = 0.

Cách 2: Vì tanx = 2 $\Rightarrow$ sinx = 2cosx. Thay vào A ta được:

$A = \frac{4\cos^2 x - 2.2\cos x.\cos x}{\cos^2 x + 3.4\cos^2 x} = 0$.

3. Bài tập:

1. Tính các giá trị lượng giác còn lại biết:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$

b) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ $(180^0 < \alpha < 270^0)$

c) $\cot\alpha = \frac{2}{3}$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$

d) $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$.

2. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Tính theo m giá trị của:

a) $M = \sin\alpha \cos\alpha$ b) $N = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

c) $P = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$. d) $Q = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

3. Cho $\tan\alpha = 3$, tính giá trị biểu thức

a) $A = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$. b) $B = \frac{2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 7\cos^2\alpha}$.

§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Cung đối (tổng bằng 0):

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

2. Cung bù (tổng bằng π):

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

3. Cung phụ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$):

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$; $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$; $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$

4. Cung khác π (hiệu bằng π):

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$; $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Tìm giá trị lượng giác của một góc**

1. Phương pháp:

- Đưa góc về dạng $\alpha + k2\pi$ trong đó $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$.
- Nếu α thuộc góc phần tư thứ II thì ta dùng cung bù.
- Nếu α thuộc góc phần tư thứ III thì ta dùng cung khác π.
- Nếu α thuộc góc phần tư thứ IV thì ta dùng cung đối.

2. Ví dụ: Tính các giá trị sau:

a) $M = \tan 240^0 + \cot 150^0$.

b) $N = \cos 120^0 + \tan 300^0.\sin(-780^0)$.

Giải

a) Ta có: $\tan 240^0 = \tan(180^0 + 60^0) = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

$\cot 150^0 = \cot(180^0 - 30^0) = -\cot 30^0 = -\sqrt{3}$.

Vậy $M = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$.

b) Ta có:

$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

$\tan 300^0 = \tan(360^0 - 60^0) = \tan(-60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

$\sin(-780^0) = -\sin(60^0 + 2.360^0) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $N = -\frac{1}{2} + (-\sqrt{3}).\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$

3. Bài tập:

Tính các giá trị sau:

1. $\sin 150^0$; $\cot 495^0$; $\tan 330^0$.

2. $\sin 210^0$; $\sin 225^0$; $\tan 240^0$; $\cot 225^0$.

3. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\tan\frac{7\pi}{4}$; $\cot\frac{11\pi}{6}$.

4. Cho $\cos(180^0 - a) = \frac{3}{5}$ và $180^0 < a < 270^0$. Tính $\tan(270^0 - a)$.

5. Cho $\cot(270^0 + a) = -4$ và $180^0 < a < 270^0$. Tính $\sin(90^0 + a)$.

Vấn đề 2: Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp:

* Dùng cung liên kết đưa các giá trị lượng giác của các góc đã cho thành giá trị lượng giác các góc trong $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

* Dùng các công thức lượng giác để thu gọn biểu thức.

2. Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{\tan 368^0} + \frac{2\sin 2550^0 \cos(-188^0)}{2\cos 638^0 + \cos 98^0}$

Giải

$$A = \frac{1}{\tan 368^0} + \frac{2\sin 2550^0 \cos(-188^0)}{2\cos 638^0 + \cos 98^0}.$$

$$= \frac{1}{\tan(360^0 + 8^0)} + \frac{2\sin(30^0 + 7.360^0)\cos(180^0 + 8^0)}{2\cos(720^0 - 82^0) + \cos(90^0 + 8^0)}.$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{2\sin 30^0 \cos(-8^0)}{2\cos(-82)^0 - \sin 8^0}$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{-\cos 8^0}{2\cos 82^0 - \sin 8^0}$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0 - \sin 8^0}$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{\sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} - \cot 8^0 = \cot 8^0 - \cot 8^0 = 0.$$

3. Bài tập:

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\sin(-234^0) - \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0} \tan 36^0.$

b) $B = \dfrac{(\cot 44^0 + \tan 226^0)\cos 406^0}{\cos 316^0} - \tan 72^0 . \tan 18^0.$

c) $C = \dfrac{\sin(-4,8\pi).\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)} + \dfrac{\cos(-6,7\pi).\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}.$

d) $D = \cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 60^0 + ... + \cos 160^0 + \cos 180^0.$

e) $E = \tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 .... \tan 88^0 . \tan 89^0.$

f) $F = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + ... + \sin^2 180^0.$

g) $G = \sin 825^0 . \cos(-15^0) + \cos 75^0 . \sin(-555^0) + \tan 155^0 . \tan 245^0.$

2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \sin(\pi + x) - \cos(\dfrac{\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x) + \tan(\dfrac{3\pi}{2} - x).$

b) $B = \cos(\pi - x) + \sin(x - \dfrac{3\pi}{2}) - \tan(\dfrac{\pi}{2} + x).\cot(\dfrac{3\pi}{2} - x).$

c) $C = \cos(270^0 - x) - 2\sin(x - 450^0) + \cos(x + 900^0) + 2\sin(720^0 - x).$

d) $D = \left[\tan\dfrac{17\pi}{4} + \tan\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 - \left[\cot\dfrac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2.$

Vấn đề 3: Chứng minh hệ thức giữa các giá trị lượng giác của các góc trong tam giác

1. Phương pháp:

Ta dùng hệ thức liên hệ giữa các góc của một tam giác: $A + B + C = \pi$ để chứng minh.

2. Ví dụ: Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\sin B = \sin(A + C).$

b) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$.

c) $\cos C=-\cos(A+B+2C)$.

Giải

a) Ta có $A+B+C=\pi \Rightarrow \sin B=\sin(A+C)$ (vì A + C và B bù nhau)

b) Ta có $\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$ (vì $\dfrac{A+B}{2}$ và $\dfrac{C}{2}$ là hai góc phụ nhau)

c) Ta có $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B+2C=\pi+C \Rightarrow \cos(A+B+2C)=-\cos C$ (cung hơn kém π).

3. Bài tập:

Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì:

1. $\sin\dfrac{A+B+3C}{2}=\cos C$.
2. $\cos(A+B-C)=-\cos 2C$.
3. $\tan\dfrac{A+B-2C}{2}=\cot\dfrac{3C}{2}$.
4. $\sin(A+B+2C)=-\sin C$.

§4. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC CỘNG

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Các công thức cộng:

Định lí: Với mọi số thực a, b, ta có công thức:

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b \quad (1)$$

Hệ quả 1: Với mọi a, b ta có:

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b \quad (2)$$

Hệ quả 2: Với mọi a, b ta có:

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b \quad (3)$$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b \quad (4)$$

Hệ quả 3: Với $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ và $a\pm b\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ ta có:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \quad (5)$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \quad (6)$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Sử dụng trực tiếp các công thức để tính giá trị hay đơn giản biểu thức**

1. Phương pháp:

* Tính giá trị của một biểu thức.

* Rút gọn hoặc đơn giản một biểu thức.

* Cần chú ý phân tích các số đo của cung lượng giác qua các cung đặc biệt đã biết như 30^0, 45^0, 60^0.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: *Không dùng máy tính* hãy tính những giá trị sau:

a) $A = \cos 25^0 \cos 5^0 - \sin 25^0 \sin 5^0$.

b) $B = \cos 38^0 \cos 22^0 - \sin 38^0 \sin 22^0$.

c) $C = \sin 36^0 \cos 6^0 - \sin 126^0 \cos 84^0$.

d) $D = \cos 75^0$.

Giải

a) $A = \cos 25^0 \cos 5^0 - \sin 25^0 \sin 5^0 = \cos(25^0 + 5^0) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $B = \cos 38^0 \cos 22^0 - \sin 38^0 \sin 22^0 = \cos(38^0 + 22^0) = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

c) $C = \sin 36^0 \cos 6^0 - \sin 126^0 \cos 84^0$

$= \sin 36^0 \cos 6^0 - \sin(90^0 + 36^0).\cos(90^0 - 6^0)$

$= \sin 36^0 \cos 6^0 - \cos 36^0 . \sin 6^0 = \sin(36^0 - 6^0) = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$.

d) $D = \cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$.

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Ví dụ 2: Rút gọn:

a) $M = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

b) $N = \sin(14^0 + 2x)\cos(16^0 - 2x) + \cos(14^0 + 2x)\sin(16^0 - 2x)$.

c) $P = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x$.

d) $Q = \sin(x + y)\cos(x - y) + \sin(x - y)\cos(x + y)$.

e) $R = \dfrac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan x \tan 3x}$.

f) $S = \dfrac{\tan(a - 45^0) + 1}{1 - \tan(a - 45^0)}$.

Giải

a) $M = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 60^0 \cos x - \sin 60^0 \sin x = \cos(60^0 + x)$.

b) $N = \sin(14^0 + 2x)\cos(16^0 - 2x) + \cos(14^0 + 2x)\sin(16^0 - 2x)$.

$= \sin[(14^0 + 2x) + (16^0 - 2x)] = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

c) $P = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x = \sin(x - 5x) = \sin(-4x) = -\sin 4x$.

d) $Q = \sin(x + y)\cos(x - y) + \sin(x - y)\cos(x + y)$

$= \sin[(x + y) + (x - y)] = \sin 2x$.

e) $R = \frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan x \tan 3x} = \tan(3x - x) = \tan 2x$.

f) $S = \frac{\tan(a - 45^0) + 1}{1 - \tan(a - 45^0)} = \frac{\tan(a - 45^0) + \tan 45^0}{1 - \tan(a - 45^0)\tan 45^0}$

$= \tan[(a - 45^0) + 45^0] = \tan a$.

3. Bài tập:

1. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \cos 80^0 . \cos 40^0 - \sin 80^0 \sin 40^0$.

b) $C = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) $B = \cos(a - 30^0)$, biết $\tan a = \sqrt{2}$ $(0^0 < a < 90^0)$.

2. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $B = \sin 285^0$

b) $A = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

c) $C = \sin(-105^0)$

d) $D = \tan\frac{5\pi}{12}$.

3. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \cos 68^0 . \cos 78^0 + \cos 22^0 . \cos 12^0 - \sin 100^0$.

b) $B = \frac{\cot 225^0 - \cot 79^0 . \cot 71^0}{\cot 259^0 + \cot 251^0}$.

c) $C = \sin^2 20^0 + \sin^2 100^0 + \sin^2 140^0$.

d) $D = \cos(-53^0).\sin(-337^0) + \sin(307^0).\sin(113^0)$.

e) $E = (\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0)$.

$+ (\cos 40^0 + \cos 160^0).(\cos 320^0 - \cos 380^0)$.

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin 4x . \cot 2x - \cos 4x$

b) $B = \cos(40^0 - x)\cos(x + 20^0) - \sin(40^0 - x)\sin(x + 20^0)$

c) $C = \sin(x + 10^0)\cos(2x - 80^0) + \sin(x + 100^0)\cos(2x + 10^0)$

d) $D = \sin(a+b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(-b)$

e) $E = \cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)+\sin^2 a$

f) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)-\sin(a-b)$

g) $G = \frac{\tan 2x+\cot(90^0+x)}{1+\cot(90^0-2x)\tan x}$.

5. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$, biết rằng: $\cos a = -\frac{12}{13}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

b) $B = \tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, biết rằng: $\cot\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)=2$.

c) Cho a, b là các góc nhọn và: $\sin a = \frac{2}{3}, \tan\left(\frac{5\pi}{2}-b\right)=\frac{3}{4}$.

Tính giá trị của: $\sin(a+b)$; $\cos(a-b)$ và $\tan(a-b)$.

6. Cho $0 < a < \frac{\pi}{2}, 0 < b < \frac{\pi}{2}; a+b=\frac{\pi}{4}$ *và* $\tan a.\tan b = 3-2\sqrt{2}$

a) Tính $\tan a + \tan b$.

b) Tính $\tan a$, $\tan b$, từ đó suy ra a và b.

7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$.

b) $B = \frac{\sin 73^0 \cos 3^0 - \sin 87^0 \cos 17^0}{\cos 132^0 \cos 62^0 + \cos 42^0 \cos 28^0}$.

c) $C = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} - \tan b$.

d) $D = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a}$.

e) $E = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1-\tan^2 2x.\tan^2 x}$.

Vấn đề 2: Chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp:

Áp dụng các công thức cộng thích hợp để:

– Biến đổi vế này thành vế kia.

– Biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng.

– Biến đổi đẳng thức tương đương với một đẳng thức đúng...

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin A$.

b) $\cos A\cos B - \sin A\sin B = -\cos C$.

Giải

a) Ta có: $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$ (ĐPCM)

b) Ta có: $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$ (ĐPCM)

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\sin(x+60^0).\sin(x-60^0) = \sin^2 x - \frac{3}{4}.$$

Giải

Vế trái $= (\sin x\cos 60^0 + \cos x\sin 60^0)(\sin x\cos 60^0 - \cos x\sin 60^0)$

$= (\sin x\cos 60^0)^2 - (\cos x\sin 60^0)^2$

$= \sin^2 x.\frac{1}{4} - \cos^2 x.\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4}\sin^2 x) - \frac{3}{4}\left(1 - \sin^2 x\right)$

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\sin^2 x - \frac{3}{4} = \sin^2 x - \frac{3}{4}$ = Vế phải.

Vậy $\sin(x+60^0).\sin(x-60^0) = \sin^2 x - \frac{3}{4}$.

3. Bài tập:

1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) = \sin a$.

b) $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a\cot b + 1}{\cot a\cot b - 1}$.

c) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

b) $\frac{\cos(a+b).\cos(a-b)}{\cos^2 a.\cos^2 b} = 1 - \tan^2 a.\tan^2 b$ $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$.

c) $\sin^2(a - b) + \sin^2 b + 2\sin(a - b)\sin b.\cos a = \sin^2 a$.

d) $\sin(a + 2b) = \sin a$ nếu $\cos(a + b) = 0$.

3. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\cos A = \sin B.\sin C - \cos B.\cos C$.

b) $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ (ΔABC không vuông).

d) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$.

Vấn đề 3: Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

1. Phương pháp:

Chứng minh một biểu thức lượng giác M không phụ thuộc số đo x của góc đang xét ta rút gọn biểu thức M cho đến khi trong biểu thức không còn x.

Như vậy: Biểu thức M không phụ thuộc vào đối số x.

2. Ví dụ:

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Giải

Ta có:

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{12}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

3. Bài tập:

1. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

b) $B = \sin^2 x + \sin^2(60^0 + x) + \sin^2(x - 60^0)$.

2. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \cos^2 x + \cos^2(120^0 + x) + \cos^2(120^0 - x)$.

b) $B = \tan x.\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).\tan x$.

II. CÔNG THỨC NHÂN

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

I. Công thức nhân đôi

1. Công thức nhân đôi:

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\left(a \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \text{ và } a \neq \dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Công thức hạ bậc:

Từ công thức nhân 2 trên đây, ta dễ dàng suy ra các công thức sau:

- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ $\left(a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

3. Công thức tính theo $t = \tan\dfrac{a}{2}$ $(a \neq \pi + k2\pi)$

- $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

4. Công thức nhân 3

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ $\qquad$ $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

5. Công thức hạ bậc 3:

- $\sin^3 a = \dfrac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)$
- $\cos^3 a = \dfrac{1}{4}(3\cos a + \cos 3a)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **Sử dụng trực tiếp các công thức để tính hay rút gọn biểu thức**

1. Phương pháp:

Áp dụng các công thức nhân 2, nhân 3, hạ bậc, ... thích hợp ta có thể tính giá trị của các biểu thức lượng giác hay có thể rút gọn các biểu thức lượng giác.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức:

$A = \sin 5a.\cos 5a.$

$B = \sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 4a.$

$C = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}.$

$D = (\sin 5a.\cos 2a - \sin 2a.\cos 5a)(\cos 2a.\cos a - \sin 2a.\sin a).$

Giải

- $A = \sin 5a.\cos 5a = \frac{1}{2}.2\sin 5a\cos 5a = \frac{1}{2}\sin 10a$.
- $B = \sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 4a = \frac{1}{2}\sin 2a.\cos 2a\cos 4a$

  $= \frac{1}{4}\sin 4a\cos 4a = \frac{1}{8}\sin 8a$.
- $C = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(2.\frac{x}{2}\right) = \cos x$.
- D = (sin5a.cos2a – sin2a.cos5a)(cos2a.cosa – sin2a.sina).

  = sin(5a – 2a).cos(2a + a) = sin3a.cos3a = $\frac{1}{2}\sin 6a$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của các biểu thức:

$A = \sin 6^0 \cos 12^0 \cos 24^0 \cos 48^0$.

$B = \frac{\tan 15^0}{1 - \tan^2 15^0}$.

$C = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

$D = 3\cos 10^0 - 4\cos^3 10^0$.

$E = \sin 20^0(1 - 4\cos^2 20^0)$.

$F = 4\sin^3 40^0 + 3\cos 130^0$

Giải

- $A = \sin 6^0 \cos 12^0 \cos 24^0 \cos 48^0$

  $= \frac{\sin 6^0.\cos 6^0 \cos 12^0 \cos 24^0.\cos 48^0}{\cos 6^0}$

  $= \frac{\sin 12^0 \cos 12^0 \cos 24^0.\cos 48^0}{2\cos 6^0}$

  $= \frac{\sin 24^0 \cos 24^0.\cos 48^0}{4\cos 6^0}$

  $= \frac{\sin 48^0.\cos 48^0}{8\cos 6^0} = \frac{\sin 96^0}{16\cos 6^0} = \frac{\cos 6^0}{16\cos 6^0} = \frac{1}{16}$.
- $B = \frac{\tan 15^0}{1 - \tan^2 15^0} = \frac{1}{2}.\frac{2\tan 15^0}{1 - \tan^2 15^0} = \frac{1}{2}\tan(2.15^0) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
- $C = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\left(2.\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $D = 3\cos 10^0 - 4\cos^3 10^0 = \sin(3.10^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

▸ $E = \sin 20^0(1 - 4\cos^2 20^0) = \sin 20^0[1 - 4(1 - \sin^2 20^0)]$

$= \sin 20^0[4\sin^2 20^0 - 3) = -\sin(3.20^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

▸ $F = 4\sin^3 40^0 + 3\cos 130^0 = 4\sin^3 40^0 + 3\cos(90^0 + 40^0)$

$= 4\sin^3 40^0 - 3\sin 40^0 = -\sin(3.40^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3:

a) Biết: cosa – sina = m. Tính theo m giá trị của sin2a và cos4a

b) Tính: $M = \sin^5 a.\cos a - \cos^5 a.\sin a$ khi $a = \frac{\pi}{16}$.

Giải

a) * Ta có cosa – sina = m $\Rightarrow m^2 = 1 - 2\sin a\cos a = 1 - \sin 2a$.

$\Rightarrow \sin 2a = 1 - m^2$.

* $\cos 4a = 1 - 2\sin^2 2a = 1 - 2(1 - m^2)^2 = -2m^4 + 4m^2 - 1$.

b) Ta có: $M = \sin a\cos a(\sin^4 a - \cos^4 a) = \sin a\cos a(\sin^2 a - \cos^2 a)$

$= \frac{1}{2}\sin 2a.(-\cos 2a) = -\frac{1}{4}\sin 4a$.

Khi $a = \frac{\pi}{16}$ thì $M = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ví dụ 4: a) Khai triển cos4a theo cosa.

b) Tính theo cos4x biểu thức: $A = \cos^6 x + \sin^6 x$.

Giải

a) Ta có: $\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = 2[2\cos^2 a - 1]^2 - 1 = 8\cos^4 a + 8\cos^2 a + 1$.

b) Ta có: $A = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3\sin^2 2x}{4} = 1 - \frac{3}{4}.\frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x)$.

3. Bài tập:

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos^2(x + 45^0) - \sin^2(x + 45^0)$.

b) $B = \cos^4 2x - \sin^4 2x$.

c) $C = (\sin x + \cos x)^2$.

d) $D = 1 - 8\sin^2 x.\cos^2 x$.

e) $E = 4\sin x.\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

f) $F = \frac{2}{(1 - \tan a)(1 + \cot a)}$.

2. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \cos^2\frac{\pi}{24} - \cos^4\frac{\pi}{24}$.

b) $B = \tan^2 15^0 + \tan^2 75^0$.

c) $A = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\cos\frac{4\pi}{7}$.

d) $B = 96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

e) $C = \cos\frac{\pi}{33}.\cos\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$.

3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 8\tan 18^0.\cos 18^0.\cos 36^0.\cos 72^0.\cos 144^0$.

b) $B = \sin 6^0.\sin 42^0.\sin 66^0.\sin 78^0$.

c) $C = \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$.

d) $D = \frac{\tan\frac{7\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$.

4. Tính theo cos2x các biểu thức sau:

a) $A = 1 + \cos^2 x$ b) $B = \frac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x}$.

5. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a) $A = 1 + \sin 2x$ b) $B = 1 - \sin x$.

6. a) Tính: sina, cosa, tana biết $a = 112^0\,30'$.

b) Cho $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ và $0 < a < \frac{\pi}{6}$. Tính $\tan\frac{a}{2}$

c) Cho $0 < a; b < \frac{\pi}{2}$; $3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1$ và $3\sin 2a - 2\sin 2b = 0$.

Tính $\cos(a + 2b)$. Suy ra số đo của $(a + 2b)$.

Vấn đề 2: Chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp:

Để chứng minh một đẳng thức A = B (1), ta có thể sử dụng một trong năm phương pháp giống như được trình bày ở mục **I. Công thức cộng**

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^3 x.\sin x - \sin^3 x.\cos x = \frac{\sin 4x}{4}$ (1)

b) $\cot a - \tan a = 2\cot 2a$ (2)

c) $\tan\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=\tan x$ (3)

Giải

a) Vế trái (1) = $\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$ = Vế phải (1).

b) Vế trái (2) = $\cot a-\tan a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a}$

$=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a\cos a}=\frac{\cos 2a}{\frac{\sin 2a}{2}}=2.\frac{\cos 2a}{\sin 2a}=2\cot 2a$ = Vế phải (2).

c) Vế trái (3) = $\tan\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=\tan\frac{x}{2}.\frac{1+\cos x}{\sin x}$

$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ = Vế phải (3).

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\cos 3x.\sin^3 x+\sin 3x.\cos^3 x=\frac{3}{4}.\sin 4x$.

Suy ra giá trị của $A=\cos 22^0 30'.\sin^3 172^0 30'-\sin 22^0 30'.\cos^3 172^0 30'$.

Giải

Ta có: $\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x=\cos 3x.\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}+\sin 3x.\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

$\frac{3}{4}[\cos 3x\sin x+\sin 3x\cos x]=\frac{1}{4}\sin(3x+x)=\frac{\sin 4x}{4}$ (ĐPCM).

* Ta có: $\sin 172^0 30'=\sin(180^0-7^0 30')=\sin 7^0 30'$.

$\cos 172^0 30'=\cos(180^0-7^0 30')=-\cos 7^0 30'$.

Do đó:

$A=\cos 22^0 30'.\sin^3 7^0 30'+\sin 22^0 30'.\cos^3 7^0 30'$.

$=\frac{1}{4}\sin(4.7^0 30')=\frac{1}{4}\sin 30^0=\frac{1}{8}$.

3. Bài tập:

1. Chứng minh rằng:

a) $\sin 4a=4\sin a\cos a(1-2\sin^2 a)$.

b) $\cos^4 x+\sin^4 x-6\cos^2 x.\sin^2 x=\cos 4x$.

c) $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$.

d) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x$.

e) $\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}=\cot x$.

f) $4\cos x.\cos(60^0+x).\cos(60^0-x)=\cos 3x$.

Từ đó, tính $C=4\cos 10^0\cos 70^0\cos 50^0$.

2. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{2\sin a-\sin 2a}{2\sin a+\sin 2a}=\tan^2\dfrac{a}{2}\left(a\neq\pi+k.2\pi\right)$.

b) $\dfrac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}=\dfrac{1}{2}\sin 4x$.

c) $\dfrac{\sin x+\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\dfrac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$.

d) $\dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a}=\dfrac{1-\tan a}{1+\tan a}$.

e) $\dfrac{\sin^4 a-\cos^4 a+\cos^2 a}{2(1-\cos a)}=\cos^2\dfrac{a}{2}$.

f) $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=8\cos 2x$.

g) $\dfrac{\sin^2 2a-4\sin^2 a}{\sin^2 2a+4\sin^2 a-4}=\tan^4 a$.

h) $\dfrac{\cot^2 2x-1}{2\cot 2x}-\cos 8x\cot 4x=\sin 8x$.

Vấn đề 3: Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

1. Phương pháp:

Chứng minh một biểu thức lượng giác M không phụ thuộc số đo x, ta rút gọn biểu thức M cho đến khi trong M không còn x nữa.

2. Ví dụ: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$A=8\sin^4 x+4\cos 2x-\cos 4x-5$.

Giải

Ta có:

$$A=8.\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+4\cos 2x-(2\cos^2 2x-1)-5$$

$=2(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)+4\cos 2x-2\cos^2 2x-3=-1$.

Vậy A không phụ thuộc vào x.

C. BÀI TẬP:

1. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) $A = \dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$.

b) $B = \sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin^4\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2. Chứng minh rằng nếu $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{b}$ thì biểu thức A = asinx + bcosx không phụ thuộc vào a và x.

3. Cho α, β, γ thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{b+a}$.

Chứng minh biểu thức: $E = \tan^2\dfrac{\alpha}{2} + \tan^2\dfrac{\beta}{2} + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}$ không phụ thuộc vào a, b và c.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

Đặc biệt:

$\mathbf{\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)}$; $\mathbf{\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)}$; $\mathbf{\sin a.\cos a = \frac{1}{2}.\sin 2a}$.

2. Công thức biến đổi tổng thành tích:

* $\cos x + \cos y = 2.\cos\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2}$

* $\cos x - \cos y = -2.\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

* $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$$* \sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$* \tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x.\cos y}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$$

$$* \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x.\sin y}\ (x \neq k\pi, y \neq m\pi)$$

Ghi chú:

Các công thức sau cũng thường dùng để biến **tổng thành tích**:

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}; \qquad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Biến đổi các biểu thức thành tổng

1. Phương pháp: Áp dụng các công thức biến tích thành tổng để biến đổi.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức A = 2sinx (cosx + cos3x + cos5x).

Suy ra giá trị của $T = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

Giải

Ta có: A = 2sinxcosx + 2cos3xsinx + 2cos5xsinx

= sin2x + (sin4x – sin2x) + (sin6x – sin4x) = sin6x.

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$2\sin\frac{\pi}{7}.T = 2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{7}$$

Suy ra $T = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

A = sin7x.sin3x.

B = sin(x + y).cos(x – y).

C = cos 15^0 sin 75^0.

Giải

$$* A = \sin 7x\sin 3x = \frac{1}{2}\left[\cos(7x - 3x) - \cos(7x + 3x)\right] = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x).$$

* $B = \frac{1}{2}[\sin(x+y+x-y)+\sin(x+y-x+y)] = \frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)$.

* $C = \frac{1}{2}[\sin(75^0+15^0)+\sin(75^0-15^0)]$

$= \frac{1}{2}(\sin 90^0+\sin 60^0) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Bài tập:

1. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) A = cos(x + y).cos(x – y).

b) B = sin 15^0 sin 75^0.

c) C = 2.sinx.sin3x.sin5x.

d) D = sin x.cos (x + 60^0). cos (x – 60^0).

2. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) A = sin(a + 30^0). cos(a – 30^0).

b) B = 8cosx.sin2x.sin3x

c) $C = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos 2x$.

d) D = 4cos(a – b).cos(b – c).cos(c – a).

Vấn đề 2: Biến đổi các biểu thức thành tích

1. Phương pháp: Áp dụng các công thức biến tổng thành tích để biến đổi.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a) $A = \cos^2 2x - \cos^2 2y$

b) $B = 1 - \sin x - \cos 2x$

c) C = cos5x + cos3x

d) D = sin7x – 2sin4x + sinx

Giải

a) $A = \cos^2 2x - \cos^2 2y = \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 4y}{2}$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 4y) = -\sin(2x + 2y)\sin(2x - 2y)$.

b) $B = 1 - \sin x - \cos 2x = 1 - \cos 2x - \sin x$

$= 2\sin^2 x - \sin x = 2\sin x(\sin x - \frac{1}{2})$

$= 2\sin x(\sin x - \sin 30^0) = 4\sin x\cos\left(\frac{x+30^0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-30^0}{2}\right)$.

c) $C = \cos 5x + \cos 3x = 2\cos\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2} = 2\cos 4x\cos x$.

d) $D = \sin 7x - 2\sin 4x + \sin x = (\sin 7x + \sin x) - 2\sin 4x$

$= 2\sin 4x\cos 3x - 2\sin 4x = 2\sin 4x(\cos 3x - 1) = -4\sin 4x\sin^2\frac{3x}{2}$.

3. Bài tập:

1. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a) $A = 1 - 2\cos x$.

b) $B = \sqrt{3} - 2\sin x$.

c) $A = \cos(x - 30^0) - \cos(x - 60^0)$.

d) $B = 1 + \sin 2x - \cos 4x$.

e) $C = \sin 5a + \sin 6a + \sin 7a + \sin 8a$.

f) $D = \sin^2 x - 2\sin^2 2x + \sin^2 3x$.

g) $E = 4\cos^2 x - 1$.

h) $F = \cos(60^0 + x) + \cos(60^0 - x) + \cos 3x$.

i) $G = \sin 70^0 - \sin 20^0 + \sin 50^0$.

2. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a) $A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

b) $B = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$.

c) $C = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4x + 1 - 2\cos^2 2x$.

d) $D = \sin x.\cos 3x + \sin 4x.\cos 2x$.

e) $E = 2\cos 3x.\cos x + \cos 10x$.

f) $F = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ (A, B, C là ba góc của tam giác).

g) $G = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C - 1$ (A, B, C là ba góc của tam giác).

Vấn đề 3: **Áp dụng các công thức để tính giá trị hay rút gọn một biểu thức lượng giác**

1. Phương pháp:

Áp dụng các công thức biến tổng thành tích, tích thành tổng thích hợp ta có thể tính giá trị hay rút gọn các biểu thức lượng giác.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức: $A = \sin^2 10^0 + \cos 70^0\cos 50^0$.

Giải

Ta có: $A = \frac{1-\cos 20^0}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 120^0 + \cos 20^0\right) = \frac{1}{2}\cos 120^0 = -\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$ b) $B = \frac{\sin a - 3\sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 3\cos 2a + \cos 3a}$

Giải

a) $A = \dfrac{-2\sin 3a\sin a}{2\cos 3a\sin a} = \dfrac{\sin 3a}{\cos 3a} = \tan 3a$.

b) $B = \dfrac{\sin 3a + \sin a - 3\sin 2a}{\cos 3a + \cos a - 3\cos 2a} = \dfrac{2\sin 2a\cos a - 3\sin 2a}{2\cos 2a\cos a - 3\cos 2a}$

$= \dfrac{\sin 2a(2\cos a - 3)}{\cos 2a(2\cos a - 3)} = \tan 2a.$

3. Bài tập:

1. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 4(\cos 24^0 + \cos 48^0 - \cos 84^0 - \cos 12^0)$.

b) $B = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

c) $C = \sin\dfrac{x}{4}.\sin\dfrac{5x}{4}$, biết $x = 60^0$.

d) $D = \sin 20^0.\sin 40^0.\sin 80^0$.

2. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \cos 10^0.\cos 30^0.\cos 50^0.\cos 70^0$.

b) $B = \dfrac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0$.

c) $C = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5}$.

d) $D = \dfrac{\sin 40^0 - \sin 45^0 + \sin 50^0}{\cos 40^0 - \cos 45^0 + \cos 50^0} - \dfrac{6\left(\sqrt{3} + 3\tan 15^0\right)}{3 - \sqrt{3}\tan 15^0}$.

3. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \dfrac{\sin 5a - \sin 3a}{2\cos 4a}$.

b) $B = \dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$.

c) $C = \dfrac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a}$.

d) $D = \sin 4x.\sin 10x - \sin 11x.\sin 3x - \sin 7x.\sin x$.

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a + \sin 2a}$.

b) $B = \dfrac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$.

c) $C = \dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$.

d) $D = \dfrac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{2\cos^2 a + \cos a - 1}$.

e) $E = \dfrac{\sin a}{\sin(a-b).\sin(a-c)} + \dfrac{\sin b}{\sin(b-a).\sin(b-c)} + \dfrac{\sin c}{\sin(c-a).\sin(c-b)}$.

f) $F = \dfrac{\sin(a+b) - \sin a}{\sin(a+b) + \sin a} - \dfrac{\cos(a+b) + \cos a}{\cos(a+b) - \cos a}$.

Vấn đề 4: ***Chứng minh đẳng thức***

1. Phương pháp:

Để chứng minh một đẳng thức A = B (1), ta có thể sử dụng các phương pháp tương tự như đã trình bày ở phần trước.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos 3x = 4\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$

b) $\sin^2 b - \cos^2(a-b) + 2\cos a.\cos b.\cos(a-b) = \cos^2 a$

Giải

a) Vế phải $= 2\cos x.\left[\cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{co}2x\right]$

$= 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos x + 2\cos 2x\cos x$

$= -\cos x + \cos 3x + \cos x = \cos 3x =$ Vế trái.

Vậy $\cos 3x = 4\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

b) Vế trái $= \sin^2 b - \cos^2(a-b) + 2\cos a.\cos b.\cos(a-b)$

$= \sin^2 b - \cos(a-b)[\cos(a-b) - 2\cos a\cos b]$

$= \sin^2 b - \cos(a-b)[\cos(a-b) - \cos(a+b) - \cos(a-b)]$

$= \sin^2 b - \cos(a+b)\cos(a-b)$

$= \sin^2 b - \dfrac{1}{2}[\cos 2a + \cos 2b]$

$= \sin^2 b - \dfrac{1}{2}\left[2\cos^2 a - 1 + 1 - 2\sin^2 b\right] = \cos^2 a =$ Vế phải.

Vậy $\sin^2 b - \cos^2(a-b) + 2\cos a.\cos b.\cos(a-b) = \cos^2 a$.

Ví dụ 2: Trong tam giác ABC, chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C$

Giải

a) Vế trái $=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right]$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ = Vế phải.

3. Bài tập:

1. Không sử dụng máy tính, hãy chứng minh:

a) $\sin 75^0+\cos 75^0=\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\sin 65^0+\sin 55^0=\sqrt{3}.\cos 5^0$

c) $\cos 12^0-\cos 48^0=\sin 18^0$

d) $\tan 267^0+\tan 93^0=0$.

2. Chứng minh các đẳng thức:

a) sina.sin(b – c) + sinb.sin(c – a) + sinc.sin(a – b) = 0.

b) sina + sinb + sinc = $4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$, với a + b = c.

3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{\sin^2 4a}{2\cos a+\cos 3a+\cos 5a}=2\sin a.\sin 2a$.

b) $8\sin^2 x.\sin(x+60^0).\sin(x-60^0)=\cos 4x-\cos 2x$.

c) $(\sin x+\cos x)^2-\cos 4x=4\sin 2x.\sin(x+15^0)\cos(x-15^0)$.

Vấn đề 5: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc đối số

1. Phương pháp:

Chứng minh một biểu thức lượng giác M không phụ thuộc số đo của x ta rút gọn M thành biểu thức không còn x.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y:

$A=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2x.\cos 2y$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1+\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2y)}{2} - \cos 2x\cos 2y$$

$$= 1 + \frac{\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)}{2} - \cos 2x\cos 2y$$

$= 1 + \cos 2x\cos 2y - \cos 2x\cos 2y = 1.$

Vậy A không phụ thuộc x và y.

3. Bài tập:

1. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$

b) $B = \frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}.\cot x.$

2. Cho tam giác ABC. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin A.\cos B.\cos C + \sin B.\cos C.\cos A + \sin C.\cos A.\cos B = \sin A.\sin B.\sin C.$

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 6

1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1} = \sin x + \cos x;$

b) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.\frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x} = \frac{1+\tan^4 x}{\tan^2 x + \cot^2 x};$

c) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x};$

d) $\frac{\tan^2 x - \tan^2 y}{\tan^2 x.\tan^2 y} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y}.$

2. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}.$

b) $B = \cos 10^0.\cos 50^0 - \cos 5^0.\cos 25^0 + \frac{1}{2}\sin 10^0.$

3. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) A = $\cos(90^0 + 2a)$ và B = $\cos(270^0 + 4a)$ biết $\cot(45^0 + a) = -2$.

b) $B = \sin^4 a + \cos^4 a$ biết $\sin a + \cos a = m$.

c) $C = \dfrac{\tan a - \cot a}{\tan a + \cot a}$ biết $\sin a.\cos a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$.

4. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 50^0 + \sin^2 10^0 + \sin 50^0.\sin 10^0$.

b) $B = \sin 5^0.\sin 15^0.\sin 25^0 ... \sin 65^0.\sin 75^0.\sin 85^0$.

c) $C = 3\sin 15^0.\sin 75^0 + \dfrac{\sin 60^0}{\sin^4 15^0 - \sin^4 75^0}$.

d) $D = -2\sqrt{2}.\sin 10^0\left(2\sin 35^0 - \dfrac{1}{2\cos 5^0} - \dfrac{\cos 40^0}{\sin 5^0}\right)$.

5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{x}{2}\right)$.

b) $B = \dfrac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$.

c) $C = \cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a + x) + \cos^2(a + x)$.

d) D = cos(a + b).sin(a – b) + cos(b + c).sin(b – c) + cos(c + a).sin(c – a).

6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cot 2x + \dfrac{1}{\sin 2x} + \tan x$.

b) B = sinx (1 + 2cos 2x + 2cos 4x + 2cos 6x).

c) $C = \dfrac{\cos 7a - \cos 8a - \cos 9a + \cos 10a}{\sin 7a - \sin 8a - \sin 9a + \sin 10a}$.

d) D = $\tan 2a.\tan(30^0 - a) + \tan 2a.\tan(60^0 - a) + \tan(60^0 - a).\tan(30^0 - a)$.

7. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2}{\cos x}$.

b) $\sin^8 x - \cos^8 x = -\left(\dfrac{7}{8}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 6x\right)$.

c) $3 - 4\cos 2x + \cos 4x = 8\sin^4 x$.

d) $\dfrac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$.

8. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 x.\cos^4 x = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$.

b) $\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$.

c) $\cos(2x + 60^0).\cos(2x - 60^0) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{4}$.

d) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

9. Cho: $\cos^2 x + \cos^2 y = m$. Chứng minh: $\cos(x + y).\cos(x - y) = m - 1$.

10. a) Cho $\cos c = \cos a.\cos b \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$.

Chứng minh rằng: $\tan\frac{c+a}{2}.\tan\frac{c-a}{2} = \tan^2\frac{b}{2}$.

b) Cho $\sin(2a + b) = 5\sin b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\tan(a+b)}{\tan a} = 3\left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a + b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi\right).$$

11. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \frac{\sin 5x}{\sin x} - 2(\cos 2x + \cos 4x)$.

b) $B = 3\cos 2x + 5\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x$.

c) $C = \cos^2(x + y) + \cos^2(x - y) - \cos 2x\cos 2y$.

d) $D = \frac{\tan^2 x - 1}{2}\cot x + \cos 4x\cot 2x + \sin 4x$.

12. a) Biết $\tan(270^0 + a) = -2$. Tính giá trị của $\sin(90^0 + 2a)$ và $\cos(180^0 + 4a)$.

b) Biết: $\frac{\cos 7a + \cos 4a + \cos a}{\sin 7a + \sin 4a + \sin a} = \frac{1}{2}$. Tính $\cos 8a$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 6
GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

§ 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

Vấn đề 1: **Đổi đơn vị đo góc và cung**

1. * $20^0 = \frac{\pi}{180}.20 = \frac{\pi}{9}$

* $12^0 = \frac{\pi}{180}.12 = \frac{\pi}{15}$

* $54^0 = \frac{\pi}{180}.54 = \frac{3\pi}{10}$

* $72^0 = \frac{\pi}{180}.72 = \frac{2\pi}{5}$

* $108^0 = \frac{\pi}{180}.108 = \frac{3\pi}{5}$

* $315^0 = \frac{\pi}{180}.315 = \frac{7\pi}{4}$.

2. * $20^0 15' = \frac{\pi}{180}.\left(20 + \frac{15}{60}\right) = \frac{9\pi}{80}$

* $70^0 10' = \frac{\pi}{180}.\left(70 + \frac{10}{60}\right) = \frac{421\pi}{1080}$.

* $75^0 54' = \frac{\pi}{180}.\left(75 + \frac{54}{60}\right) = \frac{253\pi}{600}$

* $100^0 25' = \frac{\pi}{180}.\left(100 + \frac{25}{60}\right) = \frac{241\pi}{432}$.

3. * $\frac{\pi}{8} = \frac{180^0}{\pi}.\frac{\pi}{8} = 22^0 30'$

* $\frac{\pi}{10} = \frac{180^0}{\pi}.\frac{\pi}{10} = 18^0$.

* $\frac{11\pi}{4} = \frac{180^0}{\pi}.\frac{11\pi}{4} = 495^0$

* $1{,}25\pi = \frac{180^0}{\pi}.1{,}25\pi = 225^0$.

* $2{,}25 = \frac{180^0}{\pi}.2{,}25 \approx 128^0$

* $314 = \frac{180^0}{\pi}.314 \approx 17990^0 52'29''$.

Vấn đề 2: **Tính độ dài của cung tròn**

1. * Cung $\frac{\pi}{12}$ của đường tròn có độ dài là $l = R.\frac{\pi}{12} = 20.\frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}2\ (cm)$.

* Cung $\frac{3\pi}{5}$ của đường tròn có độ dài là $l = R.\frac{3\pi}{5} = 20.\frac{3\pi}{5} = 12\pi \approx 37{,}7\ (cm)$.

* Cung 1,5 của đường tròn có độ dài là $l = R.1{,}5 = 20.1{,}5 = 3(cm)$.

* Cung $70^0 = \frac{\pi}{180}.70 = \frac{7\pi}{18}$ của đường tròn có độ dài là

$l = R.\frac{7\pi}{18} = 20.\frac{7\pi}{18} = \frac{70\pi}{9} \approx 24{,}4\ (cm)$.

2. Gọi R là bán kính của Trái Đất.

Ta có độ dài vòng kinh tuyến là $l = 2\pi.R \Rightarrow R = \dfrac{l}{2\pi} = \dfrac{40000}{2\pi} \approx 6366\text{km}.$

3. * Ta có $sđ\overset{\frown}{BC} = sđ\overset{\frown}{AC} - sđ\overset{\frown}{AB} = -35^0 - 25^0 = -60^0 = -\dfrac{\pi}{3}.$

Do đó độ dài cung $\overset{\frown}{BC}$ là $l = R.\dfrac{\pi}{3} = 30.\dfrac{\pi}{3} = 10\pi \approx 31,4(cm).$

***Vấn đề 3:* Mối liên hệ giữa góc hình học và góc lượng giác**

1. Ta có:

* $\dfrac{11\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3}$ nên $\dfrac{11\pi}{6}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $\dfrac{13\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 2\pi$ nên $\dfrac{13\pi}{6}$ là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $-\dfrac{11\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = -2\pi$ nên $-\dfrac{11\pi}{6}$ là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $\dfrac{31\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 5\pi$ nên $\dfrac{31\pi}{6}$ không là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

* $-\dfrac{35\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = -6\pi = -3.2\pi$ nên $-\dfrac{35\pi}{6}$ là số đo của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

2. a) Gọi góc hình học có số đo là x ($0 \leqslant x \leqslant \pi$), ta có:

$$x + \frac{13\pi}{3} = k2\pi \text{ hay } x - \frac{13\pi}{3} = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi - \frac{13\pi}{3} \text{ hay } x = k2\pi + \frac{13\pi}{3}.$$

▸ $0 \leqslant k2\pi - \dfrac{13\pi}{3} \leqslant \pi \Leftrightarrow \dfrac{13}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{16}{6} \Leftrightarrow k = \varnothing$ (vì k nguyên)

▸ $0 \leqslant k2\pi + \dfrac{13\pi}{3} \leqslant \pi \Leftrightarrow -\dfrac{13}{6} \leqslant k \leqslant -\dfrac{10}{6} \Leftrightarrow k = -2.$

Vậy góc hình học uOv có số đo là $\dfrac{\pi}{3}$.

Cách 2: Ta có sd(Ou, Ov) $= \dfrac{13\pi}{3} = \dfrac{\pi + 12\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2.2\pi$

$\Rightarrow$ góc hình học uOv có số đo là $\frac{\pi}{3}$.

b) Gọi góc hình học có số đo là x^0 $(0 \le x \le 180^0)$, ta có:

$x + 1140 = k360$ hay $x - 114 = k360$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = k360 - 1140$ hay $x = k360 + 1140$

- $0 \leqslant k360 - 1140 \leqslant 180 \Leftrightarrow \frac{19}{6} \leqslant k \leqslant \frac{11}{3} \Leftrightarrow k \in \varnothing$.
- $0 \leqslant k360 + 1140 \leqslant 180 \Leftrightarrow -\frac{19}{6} \leqslant k \leqslant -\frac{8}{3} \Leftrightarrow k = -3$ (vì k nguyên).

Vậy góc hình học uOv có số đo là 60^0.

Cách 2: Ta có sđ(Ou, Ov) = $1140^0 = 60^0 + 3.360^0$.

$\Rightarrow$ góc hình học uOv có số đo là 60^0.

***Vấn đề 4:* Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác**

1. $\overset{\curvearrowright}{AM} = k\pi = k\frac{2\pi}{2}$ nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ có hai điểm ngọn.

* Khi k = 0 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_0} = 0$ nên điểm ngọn là M_0 trùng với A.

* Khi k = 1 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = \pi$ nên điểm ngọn là M_1 trùng với A'.

Vậy các điểm ngọn của cung $\overset{\curvearrowright}{AM} = k\pi$ là A và A'.

2. $\overset{\curvearrowright}{AM} = k\frac{\pi}{2} = k\frac{2\pi}{4}$ nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ có 4 điểm ngọn.

* Khi k = 0 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_0} = 0$ nên điểm ngọn là M_0 trùng với A.

* Khi k = 1 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = \frac{\pi}{2}$ nên điểm ngọn là M_1 trùng với B.

* Khi k = 2 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_2} = \pi$ nên điểm ngọn là M_2 trùng với A'.

* Khi k = 3 thì $\overset{\curvearrowright}{AM_3} = \frac{3\pi}{2}$ nên điểm ngọn là M_3 trùng với B'.

Vậy các điểm ngọn của cung $\overset{\curvearrowright}{AM} = k\frac{\pi}{2}$ là A, B, A' và B'.

3. $\overset{\curvearrowright}{AM} = k\frac{\pi}{3} = k\frac{2\pi}{6}$ nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ có 6 điểm ngọn.

* Khi k = 0 thì $\overset{\frown}{AM_0} = 0$ nên điểm ngọn là M_0 trùng với A.

* Khi k = 1 thì $\overset{\frown}{AM_1} = \frac{\pi}{3}$ nên điểm ngọn là M_1.

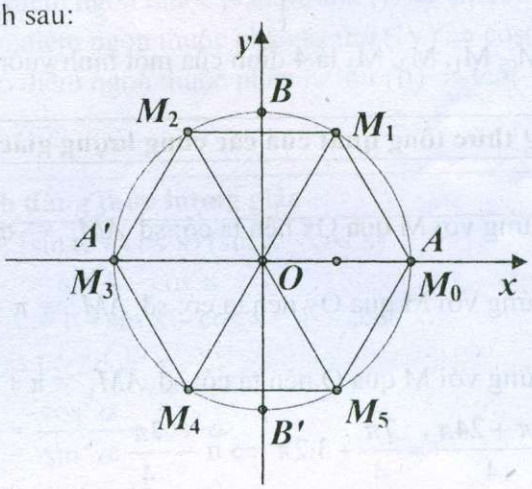
* Khi k = 2 thì $\overset{\frown}{AM_2} = \frac{2\pi}{3}$ nên điểm ngọn là M_2.

* Khi k = 3 thì $\overset{\frown}{AM_3} = \pi$ nên điểm ngọn là M_3 trùng với A'.

* Khi k = 4 thì $\overset{\frown}{AM_4} = \frac{4\pi}{3}$ nên điểm ngọn là M_4.

* Khi k = 5 thì $\overset{\frown}{AM_5} = \frac{5\pi}{3}$ nên điểm ngọn là M_5.

Vậy các điểm ngọn của cung $\overset{\frown}{AM} = k\frac{\pi}{3}$ là $M_0 \equiv A$, M_1, M_2, $M_3 \equiv A'$, M_4 và M_5 được biểu diễn trong hình sau:



Các điểm ngọn M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 là 6 đỉnh của một lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

4. $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}$ nên cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có 4 điểm ngọn.

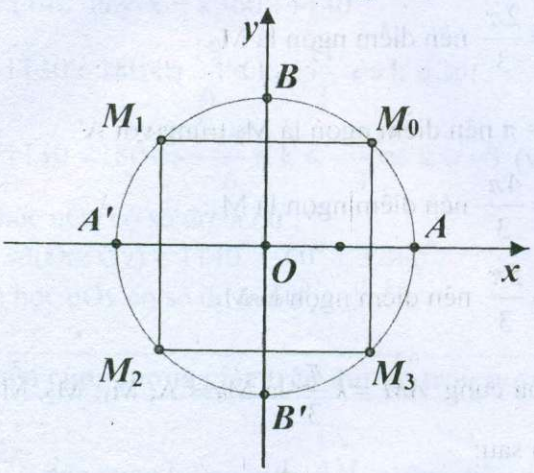
* Khi k = 0 thì $\overset{\frown}{AM_0} = \frac{\pi}{4}$ nên điểm ngọn là M_0.

* Khi k = 1 thì $\overset{\frown}{AM_1} = \frac{3\pi}{4}$ nên điểm ngọn là M_1.

* Khi k = 2 thì $\overset{\frown}{AM_2} = \frac{5\pi}{4}$ nên điểm ngọn là M_2.

* Khi k = 3 thì $\overset{\frown}{AM_3} = \frac{7\pi}{4}$ nên điểm ngọn là M_3.

Vậy các điểm ngọn của cung $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ là M_0, M_1, M_2, M_3 được biểu diễn trong hình sau:



Các điểm ngọn M_0, M_1, M_2, M_3 là 4 đỉnh của một hình vuông nội tiếp.

***Vấn đề 5:* Tìm công thức tổng quát của các cung lượng giác.**

1. Ta có: * M_1 đối xứng với M qua Ox nên ta có: sđ $\overset{\frown}{AM_1} = -\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

* M_2 đối xứng với M qua Oy nên ta có: sđ $\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

* M_3 đối xứng với M qua O nên ta có: sđ $\overset{\frown}{AM_3} = \pi + \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. a) Ta có $\frac{31\pi}{4} = \frac{7\pi + 24\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 3.2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4}$.

b) $-\frac{128\pi}{3} = \frac{4\pi - 132\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - 44\pi = \frac{4\pi}{3} - 22.2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

***Vấn đề 1:* Dấu các giá trị lượng giác của góc α**

1. Ta có: Cung 215^0 có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (III) $\Rightarrow \sin 215^0 < 0$.

Cung $\frac{21\pi}{17} \approx 222^0$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (III) $\Rightarrow \tan\frac{21\pi}{17} > 0$.

Vậy M < 0.

2. Ta có: Cung $\frac{3\pi}{5}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (II) $\Rightarrow \cot\frac{3\pi}{5} < 0$.

Cung $-\frac{2\pi}{3}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (III) $\Rightarrow \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0$.

Vậy $N > 0$.

3. Ta có: Cung $\frac{4\pi}{5}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (II) $\Rightarrow \cos\frac{4\pi}{5} < 0$.

Cung $-\frac{\pi}{5}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (IV) $\Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) < 0$.

Cung $\frac{4\pi}{3}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (III) $\Rightarrow \tan\frac{4\pi}{3} > 0$.

Cung $\frac{9\pi}{5}$ có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (IV) $\Rightarrow \cot\frac{9\pi}{5} < 0$.

Vậy $P < 0$.

4. Ta có: Cung 400^0 có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (I) $\Rightarrow \sin 400^0 > 0$.

Cung -370^0 có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (IV) $\Rightarrow \cos(-370^0) > 0$.

Cung -200^0 có điểm ngọn thuộc phần tư thứ (II) $\Rightarrow \tan(-200^0) < 0$.

Vậy $Q < 0$.

***Vấn đề 2:* Chứng minh đẳng thức lượng giác**

1. Ta có $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$= \sin^2 x - \cos^2 x$

$= 1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$.

Vậy $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$.

2. Ta có: $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$= \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)\cos^2\alpha$

$= (1 + \cot^2\alpha - 1)\cos^2\alpha = \cot^2\alpha \cos^2\alpha$.

Vậy $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha.\cos^2\alpha$.

3. Ta có: $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

$= \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\sin^2\alpha$

$= (1 + \tan^2\alpha - 1)\sin^2\alpha = \tan^2\alpha \sin^2\alpha$.

Vậy $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha.\sin^2\alpha$.

4. Ta có: $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)=2\cos x(1-\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-(\cos x-1)^2=2\cos x-2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x+2\cos x-1-2\cos x+2\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$ (đúng).

Vậy $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$.

5. Ta có:

$$\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha.\tan^2\beta}=\frac{1}{\tan^2\beta}-\frac{1}{\tan^2\alpha}$$

$$=\cot^2\beta-\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\beta}-1-\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Vậy $\dfrac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha\tan^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

6. Vế phải = (1 + cosa)(1 + tana)

= 1 + cosa + tana + cosa.tana

= 1 + cosa + tana + sina = Vế trái.

Vậy $1+\sin a+\cos a+\tan a=(1+\cos a)(1+\tan a)$.

7. Ta có: $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x+\tan y}\cdot\tan x\tan y=\tan x.\tan y.$

Vậy $\tan x.\tan y=\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$.

8. Vế trái $=\left(\sqrt{\dfrac{(1+\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}-\sqrt{\dfrac{(1-\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}\right)^2=\left(\dfrac{|1+\sin a|}{|\cos a|}-\dfrac{|1-\sin a|}{|\cos a|}\right)^2$

$=\left(\dfrac{1+\sin a}{|\cos a|}-\dfrac{1-\sin a}{|\cos a|}\right)^2$ (do $-1\le\sin a\le 1$ nên $1+\sin a\ge 0$; $1-\sin a\ge 0$)

$=\left(\dfrac{2\sin a}{|\cos a|}\right)^2=\dfrac{4\sin^2 a}{\cos^2 a}=4\tan^2 a.$

Vậy $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)^2=4\tan^2 a.$

9. $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

$=\dfrac{\sin x(\cos x-\sin x)-\cos x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x-(\sin x\cot x)^2}{(\sin x\cot x)^2-\sin^2 x}=\dfrac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x}$.

Vậy $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x}$.

10. $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

$=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

$=\dfrac{\cos x\tan x+\cos x}{\sin x\tan x-\cos x}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}$.

Vậy $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}$.

Vấn đề 3: **Rút gọn biểu thức lượng giác**

1. A $=(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2$

$=(\tan^2x+2\tan x\cot x+\cot^2x)-(\tan^2x-2\tan x\cot x+\cot^2x)$

$=4\tan x\cot x=4.$

2. B $=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x=\cos^2x\cot^2x-\cot^2x+1$

$=\cot^2x(\cos^2x-1)+1$ $=\cot^2x(-\sin^2x)+1$

$=-\cos^2x+1=\sin^2x.$

3. C $=\cos^4x+\sin^2x\cos^2x+\sin^2x=\cos^2x(\cos^2x+\sin^2x)+\sin^2x$

$=\cos^2x+\sin^2x=1.$

4. D $=\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$=\dfrac{\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\dfrac{\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{1}{\cos x}$.

5. E $=\dfrac{\cos x.\tan x}{\sin^2 x}-\cot x.\cos x=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}.\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}.\cos x$

$=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x}=\sin x.$

6. F $= \sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sin a)^2}{1-\sin^2 a}} - \sqrt{\dfrac{(1-\sin a)^2}{1+\sin^2 a}}$

$= \dfrac{|1+\sin a|}{|\cos a|} - \dfrac{|1-\sin a|}{|\cos a|} = \dfrac{1+\sin a-(1-\sin a)}{|\cos a|} = \dfrac{2\sin a}{|\cos a|}.$

7. G $= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}\left[1-\left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2\right] = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}\left[\dfrac{\cos^2 x-(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}\right]$

$= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}\left[\dfrac{\cos^2 x-1+2\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right]$

$= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}\left[\dfrac{-\sin^2 x+2\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\right]$

$= \dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{2\sin x(1-\sin x)}{1-\sin x} = 2\tan x.$

8. H $= \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\tan^2 x}+\cos^4 x = \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}+\cos^4 x$

$= \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}}+\cos^4 x = \dfrac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^4 x-\sin^4 x}+\cos^4 x$

$= \dfrac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}+\cos^4 x = \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x$

$= \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x.$

Vấn đề 4: Chứng minh một biểu thức độc lập đối với biến

1. A $= \dfrac{\cot^2 x-\cos^2 x}{\cot^2 x}+\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}$

$= 1-\cos^2 x.\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= 1-\sin^2 x + \sin^2 x = 1.$ Vậy A không phụ thuộc x.

2. B $= \dfrac{(1-\tan^2 x)^2}{4\tan^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}$

$= \dfrac{1}{4}\left[\cot^2 x(1-\tan^2 x)^2-(1+\cot^2 x)(1+\tan^2 x)\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\cot^2 x-2\tan^2 x\cot^2 x+\tan^4 x\cot^2 x-1-\cot^2 x-\tan^2 x-\tan^2 x\cot^2 x\right].$

$= \frac{1}{4}\left[-2+\tan^2 x-1-\tan^2 x-1\right] = -1$. Vậy B không phụ thuộc x.

3. C $= 2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)$

$= 2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)$

$= 2-6\sin^2 x\cos^2 x-3+6\sin^2 x\cos^2 x = -1$. Vậy C không phụ thuộc x.

4. D $= 2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$.

Đặt $a = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1-a$. Khi đó:

$D = 2(1-a)^2-a^2+a(1-a)+3a = 2-4a+2a^2-a^2+a-a^2+3a = 2$.

Vậy D không phụ thuộc x.

5. E $= \cos^6 x+2\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\sin^4 x$.

Đặt $a = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1-a$. Khi đó:

$E = (1-a)^3+2a^2(1-a)+3a(1-a)^2+a^2$

$= 1-3a+3a^2-a^3+2a^2-2a^3+3a-6a^2+3a^3+a^2 = 1$.

Vậy E không phụ thuộc x.

6. F $= 2(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)$.

Đặt $a = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1-a$. Khi đó:

F $= 2[a^2+(1-a)^2+a(1-a)]^2-[a^4+(1-a)^4]$

$= 2[a^2+1-2a+a^2+a-a^2]^2-[a^4+1-4a+6a^2-4a^3+a^4]$

$= 2(a^2-a+1)^2-(2a^4-4a^3+6a^2-4a+1)$

$= 2(a^4+a^2+1-2a^3-2a+2a^2)-(2a^4-4a^3+6a^2-4a+1)$

$= 2a^4-4a^3+6a^2-4a+2-(2a^4-4a^3+6a^2-4a+1) = 1$.

Vậy F không phụ thuộc x.

Vấn đề 5: **Cho một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại, hay một biểu thức lượng giác**

1. a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$

* Ta có: $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Vì $0^0 < \alpha < 90^0$ nên $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

* $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$; $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}$.

b) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ $(180^0 < \alpha < 270^0)$

* Ta có: $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$

$180^0 < \alpha < 270^0 \Rightarrow \sin\alpha < 0$. Vậy $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

* $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$; $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{5}{12}$.

c) $\cot\alpha = \frac{2}{3}$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$

* Ta có: $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{13}$ mà $0^0 < \alpha < 90^0$ nên $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

* $\cos\alpha = \sin\alpha . \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} . \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

* $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{3}{2}$.

d) $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$.

* $\tan 15^0 = \frac{1}{\cot 15^0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

* $\frac{1}{\sin^2 15^0} = 1 + \cot^2 15^0 = 1 + (2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow \sin^2 15^0 = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (do $\sin 15^0 > 0$).

* $\cos 15^0 = \sin 15^0 . \cot 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} . (2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2. a) $M = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2} = \frac{m^2 - 1}{2}$.

b) $N = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2.\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \frac{1 - m^4 + 2m^2}{2}$.

c) $P = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2 = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2$

$= \left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2 = \frac{4}{(m^2-1)^2} - 2$.

d) $Q = (\sin\alpha + \cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$= m^3 - 3.\frac{m^2-1}{2}.m = \frac{m(-m^2+3)}{2}$.

3. a) $A = \dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha\cos\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\cos\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2.3\cos\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3.3\cos\alpha} = -\dfrac{7}{8}$.

b) $B = \dfrac{2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 7\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{2\tan^2\alpha\cos^2\alpha - 5\tan\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{3\tan^2\alpha\cos^2\alpha + \tan\alpha\cos\alpha\cos\alpha - 7\cos^2\alpha} = \dfrac{2.3^2 - 5.3 + 1}{3.3^2 + 3 - 7} = \dfrac{4}{23}$.

§ 3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Vấn đề 1: **Tìm giá trị lượng giác của một góc**

1. * $\sin 150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$.

* $\cot 495^0 = \cot(360^0 + 135^0) = \cot 135^0 = \cot(180^0 - 45^0) = -\cot 45^0 = -1$.

* $\tan 330^0 = \tan(-30^0 + 360^0) = \tan(-30^0) = -\tan 30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. * $\sin 210^0 = \sin(180^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\dfrac{1}{2}$.

* $\sin 225^0 = \sin(180^0 + 45^0) = -\sin 45^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

* $\tan 240^0 = \tan(180^0 + 60^0) = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

* $\cot 225^0 = \cot(180^0 + 45^0) = \cot 45^0 = 1$.

3. * $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

* $\tan\dfrac{7\pi}{4} = \tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$.

* $\cot\dfrac{11\pi}{6} = \cot\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

4. Ta có $\cos(180^0 - a) = -\cos a$, nên theo giả thiết ta có $\cos a = -\dfrac{3}{5}$.

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ mà $180^0 < a < 270^0$ nên $\sin a < 0$

$\Rightarrow \sin a = -\dfrac{4}{5}$.

Do đó $\tan(270^0 - a) = \tan(90^0 - a) = \cot a = \dfrac{\cos a}{\sin a} = \dfrac{3}{4}$.

5. Ta có $\cot(270^0 + a) = -4 \Rightarrow \cot(90^0 + a) = -4 \Rightarrow -\tan a = -4 \Rightarrow \tan a = 4.$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + 16 = 17 \text{ mà } 180^0 < a < 270^0 \Rightarrow \cos a < 0$$

$$\Rightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Do đó $\sin(90^0 + a) = \cos a = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

***Vấn đề 2:* Rút gọn biểu thức**

1. a) $A = \dfrac{\sin(-234^0) - \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0} \tan 36^0$

$$= \frac{-\sin 234^0 - \cos 216^0}{\sin(180^0 - 36^0) - \cos(90^0 + 36^0)}.\tan 36^0.$$

$$= \frac{-\sin(180^0 + 54^0) - \cos(180^0 + 36^0)}{\sin 36^0 + \sin 36^0}.\tan 36^0.$$

$$= \frac{\sin 54^0 + \cos 36^0}{\sin 36^0 + \sin 36^0}.\tan 36^0$$

$$= \frac{\cos 36^0 + \cos 36^0}{2\sin 36^0}.\tan 36^0 = \frac{\cos 36^0}{\sin 36^0}.\tan 36^0 = 1.$$

b) $B = \dfrac{(\cot 44^0 + \tan 226^0)\cos 406^0}{\cos 316^0} - \tan 72^0.\tan 18^0.$

$$= \frac{(\cot 44^0 + \tan(180^0 + 46^0))\cos(46^0 + 360^0)}{\cos(-44^0 + 360^0)} - \tan(90^0 - 18^0).\tan 18^0$$

$$= \frac{(\cot 44^0 + \tan 46^0)\cos 46^0}{\cos(-44^0)} - \cot 18^0 \tan 18^0$$

$$= \frac{2.\cot 44^0.\sin 44^0}{\cos 44^0} - 1 = \frac{2\cos 44^0}{\cos 44^0} - 1 = 1.$$

c) $C = \dfrac{\sin(-4,8\pi).\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)} + \dfrac{\cos(-6,7\pi).\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}.$

$$= \frac{-\sin(0,8\pi + 4\pi)\sin(0,3\pi - 6\pi)}{\cot(0,8\pi - 6\pi)} + \frac{\cos(0,7\pi + 6\pi)\cos(0,2\pi - 6\pi)}{-\tan(0,2\pi + 6\pi)}$$

$$= \frac{-\sin(0,8\pi)\sin(0,3\pi)}{\cot(0,8\pi)} - \frac{\cos(0,7\pi)\cos(0,2\pi)}{\tan(0,2\pi)}.$$

$$= -\sin(0,8\pi)\tan(0,8\pi).\sin(0,3\pi) - \cos(\pi - 0,3\pi).\cos(0,2\pi)\cot(0,2\pi)$$

$$= -\sin(\pi - 0,2\pi)\tan(\pi - 0,2\pi).\sin(0,3\pi) + \cos(0,3\pi).\cos(0,2\pi)\cot(0,2\pi)$$

$= \sin(0,2\pi)\tan(0,2\pi).\sin(0,5\pi - 0,2\pi) + \cos(0,5\pi - 0,2\pi).\cos(0,2\pi)\cot(0,2\pi)$

$= \sin(0,2\pi)\tan(0,2\pi).\cos(0,2\pi) + \sin(0,2\pi).\cos(0,2\pi)\cot(0,2\pi)$

$= \sin^2(0,2\pi) + \cos^2(0,2\pi) = 1.$

d) $D = \cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 60^0 + \ldots\ldots + \cos 160^0 + \cos 180^0.$

$= (\cos 20^0 + \cos 160^0) + (\cos 40^0 + \cos 140^0) + \ldots + (\cos 80^0 + \cos 100^0) - 1.$

$= (\cos 20^0 - \cos 20^0) + (\cos 40^0 - \cos 40^0) + \ldots (\cos 80^0 - \cos 80^0) - 1$

$= -1.$

e) $E = \tan 1^0.\tan 2^0.\tan 3^0 \ldots\ldots \tan 88^0.\tan 89^0.$

$= (\tan 1^0.\tan 89^0)(\tan 2^0.\tan 88^0)\ldots\ldots(\tan 44^0.\tan 46^0).\tan 45^0.$

$= (\tan 1^0.\cot 1^0)(\tan 2^0.\cot 2^0)\ldots\ldots(\tan 44^0.\cot 44^0).\tan 45^0.$

$= 1.1\ldots\ldots 1.1 = 1.$

f) $F = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + \ldots\ldots + \sin^2 180^0.$

$= \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 90^0 + \sin^2 100^0 + \ldots + \sin^2 170^0.$

$= \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 90^0 + \sin^2 80^0 + \ldots + \sin^2 10^0.$

$= 2[\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 80^0] + \sin^2 90^0.$

$= 2[\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 40^0 + \sin^2 50^0 + \ldots + \sin^2 80^0] + 1.$

$= 2[\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 40^0 + \cos^2 40^0 + \ldots + \cos^2 10^0] + 1.$

$= 2[\sin^2 10^0 + \cos^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \cos^2 20^0 + \ldots + \sin^2 40^0 + \cos^2 40^0] + 1.$

$= 2(1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 9.$

g) $G = \sin 825^0.\cos(-15^0) + \cos 75^0.\sin(-555^0) + \tan 155^0.\tan 245^0.$

$= \sin(105^0 + 720^0)\cos 15^0 - \cos 75^0 \sin(195^0 + 360^0) + \tan 155^0.\tan 245^0.$

$= \sin 105^0 \cos 15^0 - \cos(90^0 - 15^0)\sin 195^0 + \tan(90^0 + 65^0)\tan(180^0 + 65^0)$

$= \sin(90^0 + 15^0)\cos 15^0 - \sin 15^0.\sin(180^0 + 15^0) - \cot 65^0.\tan 65^0.$

$= \cos^2 15^0 + \sin^2 15^0 - 1 = 0.$

2. a) $A = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$= -\sin x - \sin x + \cot(-x) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -2\sin x - \cot x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -2\sin x - \cot x + \cot x = -2\sin x.$

b) $B = \cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$= -\cos x - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot x.\cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot x.\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -\cos x + \cos x + \cot x.\tan x = 1.$

c) $C = \cos(270^0 - x) - 2\sin(x - 450^0) + \cos(x + 900^0) + 2\sin(720^0 - x)$.

$= \cos(180^0 + 90^0 - x) - 2\sin(x - 90^0 - 360^0) + \cos(x - 180^0 + 1080^0) + 2\sin(-x)$

$= -\cos(90^0 - x) - \sin(x - 90^0) + \cos(x - 180^0) - 2\sin x$

$= -\sin x + \sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) - 2\sin x$

$= -3\sin x + \cos x - \cos x = -3\sin x.$

d) $D = \left[\tan\frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 - \left[\cot\frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2.$

$= \left[\tan\frac{\pi}{4} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 - \left[\cot\frac{\pi}{4} + \cot(-x)\right]^2$

$= [1 + \cot x]^2 - [1 - \cot x]^2 = 4\cot x.$

=

Vấn đề 3: **Chứng minh hệ thức giữa giá trị lượng giác của các góc trong tam giác**

1. $\sin\frac{A + B + 3C}{2} = \sin\frac{\pi + 2C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \cos C.$

2. $\cos(A + B - C) = \cos(\pi - 2C) = -\cos 2C.$

3. $\tan\frac{A + B - 2C}{2} = \tan\frac{\pi - 3C}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = \cot\frac{3C}{2}.$

4. $\sin(A + B + 2C) = \sin(\pi + C) = -\sin C.$

§4. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC CỘNG

Vấn đề 1: **Sử dụng trực tiếp các công thức để tính giá trị hay đơn giản biểu thức**

1. a) $A = \cos 80^0.\cos 40^0 - \sin 80^0.\sin 40^0 = \cos(80^0 + 40^0) = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}.$

b) $C = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ mà $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó: $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$

c) $B = \cos(a - 30^0)$, biết $\tan a = \sqrt{2}$ $(0^0 < a < 90^0)$.

Ta có: $\dfrac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \cos^2 a = \dfrac{1}{3}$

mà $0^0 < a < 90^0$ nên $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \sin a = \tan a.\cos a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $B = \cos a\cos 30^0 + \sin a\sin 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$.

2. a) $B = \sin 285^0 = \sin(180^0 + \sin 105^0) = -\sin 105^0 = -\sin(60^0 + 45^0)$

$= -[\sin 60^0\cos 45^0 + \cos 60^0\sin 45^0)]$

$= -\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

b) $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

c) $C = \sin(-105^0) = -\sin 105^0 = -\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ (xem B)

d) $D = \tan\dfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} + \tan\dfrac{\pi}{4}}{1 - \tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$.

3. a) $A = \cos 68^0.\cos 78^0 + \cos 22^0.\cos 12^0 - \sin 100^0$

$= \cos 68^0.\cos(90^0 - 12^0) + \cos(90^0 - 68^0).\cos 12^0 - \sin 100^0.$

$= \cos 68^0.\sin 12^0 + \sin 68^0.\cos 12^0 - \sin(180^0 - 80^0)$

$= \sin(68^0 + 12^0) - \sin 80^0 = 0.$

b) $B = \dfrac{\cot 225^0 - \cot 79^0.\cot 71^0}{\cot 259^0 + \cot 251^0}$

$= \dfrac{\cot(180^0 + 45^0) - \cot(90^0 - 11^0)\cot(90^0 - 19^0)}{\cot(180^0 + 79^0) + \cot(180^0 + 71^0)}$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 11^0\tan 19^0}{\cot 79^0 + \cot 71^0} = \dfrac{1 - \tan 11^0\tan 19^0}{\tan 11^0 + \tan 19^0} = \dfrac{1}{\tan(11^0 + 19^0)}$

$= \dfrac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$.

c) $C = \sin^2 20^0 + \sin^2 100^0 + \sin^2 140^0$

$= \sin^2 20^0 + \sin^2(90^0 + 10^0) + \sin^2(180^0 - 40^0)$

$= \sin^2 20^0 + \sin^2 10^0 + \sin^2 40^0$

$= \sin^2 10^0 + \sin^2(30^0 - 10^0) + \sin^2(30^0 + 10^0)$

$= \sin^2 10^0 + [\sin 30^0 \cos 10^0 - \cos 30^0 \sin 10^0]^2 + [\sin 30^0 \cos 10^0 + \cos 30^0 \sin 10^0]^2$

$= \sin^2 10^0 + (\sin 30^0 \cos 10^0)^2 - (\cos 30^0 \sin 10^0)^2$

$= \sin^2 10^0 + \frac{1}{4}\cos^2 10^0 - \frac{3}{4}\sin^2 10^0$

$= \sin^2 10^0 + \frac{1}{4}\left(1 - \sin^2 10^0\right) - \frac{3}{4}\sin^2 10^0 = \frac{1}{4}.$

d) $D = \cos(-53^0).\sin(-337^0) + \sin(307^0).\sin(113^0)$

$= \cos(-53^0).\sin(23^0 - 360^0) + \sin(-53^0 + 360^0).\sin(90^0 + 23^0).$

$= \cos(-53^0)\sin 23^0 + \sin(-53^0)\cos 23^0$

$= \sin(23^0 - 53^0) = \sin(-30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}.$

e) $E = (\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0) + (\cos 40^0 + \cos 160^0).(\cos 320^0 - \cos 380^0)$

$= (\cos 70^0 + \cos 50^0)[\cos(-50^0 + 360^0) + \cos(-70^0 + 360^0)]$

$+ [\cos 40^0 + \cos(90^0 + 70^0)].[\cos(-40^0 + 360^0) - \cos(20^0 + 360^0)]$

$= [\cos 70^0 + \cos 50^0].[\cos(-50^0) + \cos(-70^0)]$

$+ [\cos 40^0 - \sin 70^0].[\cos(-40^0) - \cos 20^0]$

$= [\cos 70^0 + \cos 50^0].[\cos 50^0 + \cos 70^0] + [\cos 40^0 - \cos 20^0].[\cos 40^0 - \cos 20^0]$

$= (\cos 70^0 + \cos 50^0)^2 + (\cos 40^0 - \cos 20^0)^2$

$= (\sin 20^0 + \sin 40^0)^2 + (\cos 40^0 - \cos 20^0)^2$

$= (\sin^2 20^0 + \cos^2 20^0) + (\sin^2 40^0 + \cos^2 40^0) - 2[\cos 40^0 \cos 20^0 - \sin 40^0 \sin 20^0].$

$= 1 + 1 - 2\cos(40^0 + 20^0) = 2 - 2\cos 60^0 = 1.$

4. a) $A = \sin 4x.\cot 2x - \cos 4x = \sin 4x.\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \cos 4x$

$= \frac{\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin(4x - 2x)}{\sin 2x} = 1.$

b) $B = \cos(40^0 - x)\cos(x + 20^0) - \sin(40^0 - x)\sin(x + 20^0)$

$= \cos[(40^0 - x) + (x + 20^0)] = \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$

c) $C = \sin(x + 10^0)\cos(2x - 80^0) + \sin(x + 100^0)\cos(2x + 10^0)$

$= \sin(x + 10^0)\cos(80^0 - 2x) + \sin(x + 10^0 + 90^0)\cos(2x + 10^0)$

$= \sin(x + 10^0)\cos(90^0 - 10^0 - 2x) + \cos(x + 10^0)\cos(2x + 10^0)$

$= \sin(x + 10^0)\sin(10^0 + 2x) + \cos(x + 10^0)\cos(2x + 10^0)$

$= \cos[(2x + 10^0) - (x + 10^0)] = \cos x.$

d) $D = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \cos a(-\sin b)$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b - \cos a \sin b = \sin a \cos b.$

e) $E = \cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)+\sin^2 a$

$= \left[\cos\frac{\pi}{4}\cos a-\sin\frac{\pi}{4}\sin a\right].\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos a+\sin\frac{\pi}{4}\sin a\right]+\sin^2 a$

$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos a\right)^2-\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin a\right)^2+\sin^2 a$

$= \frac{1}{2}\cos^2 a-\frac{1}{2}\sin^2 a+\sin^2 a = \frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{2}=\frac{1}{2}.$

f) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)-\sin(a-b)$

= sinacosb – [sinacosb – cosasinb) = cosasinb.

g) $G = \frac{\tan 2x+\cot(90^0+x)}{1+\cot(90^0-2x)\tan x} = \frac{\tan 2x-\tan x}{1+\tan 2x\tan x} = \tan(2x-x) = \tan x.$

5. a) $A = \sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$, biết rằng: $\cos a = -\frac{12}{13}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

Ta có: $\sin^2 a = 1-\cos^2 a = \frac{25}{169}$ mà $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a = -\frac{5}{13}$.

Do đó: $A = \sin\frac{\pi}{3}\cos a-\cos\frac{\pi}{3}\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{1}{2}.\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{5-12\sqrt{3}}{26}.$

b) $B = \tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, biết rằng: $\cot\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)=2$.

Ta có: $\cot\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)=2 \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2 \Rightarrow \tan a = 2.$

Do đó: $B = \frac{\tan a+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan a.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2}=-3.$

c) Cho a, b là các góc nhọn và: $\sin a = \frac{2}{3}, \tan\left(\frac{5\pi}{2}-b\right)=\frac{3}{4}$.

Ta có: $\cos^2 a = 1-\sin^2 a = 1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

$\tan\left(\frac{5\pi}{2}-b\right)=\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\frac{3}{4} \Rightarrow \cot b = \frac{3}{4}.$

$\Rightarrow \sin^2 b = \frac{1}{1+\cot^2 b}=\frac{1}{1+\frac{9}{16}}=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos b = \frac{3}{5}.$

Do đó: $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b = \frac{2}{3}.\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{4}{5} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{15}$.

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{3}{5} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{5}+8}{15}$.

$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{3\sqrt{5}+8}$.

6. a) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\Rightarrow \tan a + \tan b = \tan(a+b)(1 - \tan a\tan b) = 1.(1 - 3 + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.

b) Ta có: $\tan a + \tan b = 2\sqrt{2} - 2$; $\tan a\tan b = 3 - 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \tan a$, $\tan b$ lần lượt là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - (2\sqrt{2} - 2)X + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = \sqrt{2} - 1$.

Do đó $\tan a = \tan b = \sqrt{2} - 1$. Suy ra a = b mà $a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = b = \frac{\pi}{8}$.

7. a) $A = \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$

$= (\sin a\sin b - \cos a\cos b)(\sin a\sin b + \cos a\cos b)$

$= -\cos(a+b)\cos(a-b)$.

b) $B = \frac{\sin 73^0 \cos 3^0 - \sin 87^0 \cos 17^0}{\cos 132^0 \cos 62^0 + \cos 42^0 \cos 28^0}$

$= \frac{\sin 73^0 \cos 3^0 - \sin(90^0 - 3^0)\cos(90^0 - 73^0)}{\cos(90^0 + 42^0)\cos(90^0 - 28^0) + \cos 42^0 \cos 28^0}$

$= \frac{\sin 73^0 \cos 3^0 - \cos 3^0 \sin 73^0}{-\sin 42^0 \sin 28^0 + \cos 42^0 \cos 28^0}$

$= \frac{\sin(73^0 - 3^0)}{\cos(42^0 + 28^0)} = \frac{\sin 70^0}{\cos 70^0} = \tan 70^0$.

c) $C = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} - \tan b$

$= \frac{2[\sin a\cos b + \cos a\sin b)}{\cos a\cos b - \sin a\sin b + \cos a\cos b + \sin a\sin b} - \tan b$

$= \frac{2[\sin a\cos b + \cos a\sin b)}{2\cos a\cos b} - \tan b = \tan a + \tan b - \tan b = \tan a$.

d) $D = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}$

$= \frac{\sin a\cos b - \cos a\sin b}{\cos a\cos b} + \frac{\sin b\cos c - \cos b\sin c}{\cos b\cos c} + \frac{\sin c\cos a - \cos c\sin a}{\cos c\cos a}$

$= \tan a - \tan b + \tan b - \tan c + \tan c - \tan a = 0$.

e) $E = \dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x.\tan^2 x} = \dfrac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x \tan x} \cdot \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

$= \tan(2x - x)\tan(2x + x) = \tan x \tan 3x.$

Vấn đề 2: Chứng minh đẳng thức

1. a) $VT = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + a\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - a\right)$

$= \left[\sin\dfrac{\pi}{3}\cos a + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin a\right] - \left[\sin\dfrac{\pi}{3}\cos a - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin a\right]$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{3}\sin a = 2.\dfrac{1}{2}\sin a = \sin a = VP.$

b) $VT = \dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$

$= \dfrac{(\sin a \cot a)(\sin b \cot b) + \sin a \sin b}{(\sin a \cot a)(\sin b \cot b) - \sin a \sin b} = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1} = VP.$

c) Ta có:

$* \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin x \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos x + \sin x.$

$* \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos x \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos x + \sin x.$

Vậy $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

d) Ta có:

$* \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos x - \sin x.$

$* -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\left(\sin x \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= -\sqrt{2}\left(\sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos x - \sin x.$

Vậy $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2. a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$

$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b$

$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b.$

b) $\frac{\cos(a+b).\cos(a-b)}{\cos^2 a.\cos^2 b} = \frac{(\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b)}{\cos^2 a\cos^2 b}$

$= \frac{\cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b)}{\cos^2 a\cos^2 b} = 1 - \tan^2 a\tan^2 b.$

c) $\sin^2(a-b) + \sin^2 b + 2\sin(a-b)\sin b.\cos a$

$= (\sin a\cos b - \cos a\sin b)^2 + \sin^2 b + 2(\sin a\cos b - \cos a\sin b)\sin a\sin b$

$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b + \sin^2 b$

$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a) + \sin^2 b = \sin^2 a.$

d) Ta có $\cos(a+b) = 0 \Rightarrow \cos a\cos b - \sin a\sin b = 0 \Rightarrow \cos a\cos b = \sin a\sin b.$

Do đó: $\sin(a+2b) = \sin[(a+b)+b]$

$= \sin(a+b)\cos b + \cos(a+b)\sin b$

$= \sin(a+b)\cos b$

$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos b$

$= \sin a\cos^2 b + \cos a\sin b\cos b$

$= \sin a\cos^2 b + \sin b.\sin a\sin b$

$= \sin a(\cos^2 b + \sin^2 b) = \sin a.$

3. a) Ta có: $\sin B.\sin C - \cos B.\cos C = -\cos(B+C) = -\cos(180^0 - A) = \cos A.$

b) Ta có: $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{180^0 - A}{2}$

$= \cos\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}.$

c) Ta có: $A + B = 180^0 - C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(180^0 - C)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C.$

d) Ta có: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right) \Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

Vấn đề 3: Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

1. a) $A=\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$$=\sin^2 x+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right).\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$$

$$=\sin^2 x+\left(\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x-\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x\right)$$

$$=\sin^2 x+\frac{1}{4}\left(1-\sin^2 x\right)+\frac{3}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow$$ A không phụ thuộc x.

b) $B=\sin^2 x+\sin^2(60^0+x)+\sin^2(x-60^0)$.

$=\sin^2x+(\sin60^0\cos x+\cos60^0\sin x)^2+(\sin60^0\cos x-\cos60^0\sin x)^2$.

$=\sin^2x+2\sin^260^0\cos^2x+2\cos^260^0\sin^2x$

$$=\sin^2 x+2.\frac{3}{4}(1-\sin^2 x)+2.\frac{1}{4}\sin^2 x=\frac{3}{2}\Rightarrow$$ B không phụ thuộc x.

2. a) $A=\cos^2 x+\cos^2(120^0+x)+\cos^2(120^0-x)$

$=\cos^2x+[\cos120^0\cos x-\sin120^0\sin x]^2+[\cos120^0\cos x+\sin120^0\sin x]^2$.

$=\cos^2x+2\cos^2120^0\cos^2x+2\sin^2120^0\sin^2x$

$$=\cos^2 x+2.\frac{1}{4}\cos^2 x+2.\frac{3}{4}(1-\cos^2 x)=\frac{3}{2}\Rightarrow$$ A không phụ thuộc x.

b) $B=\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan x$.

Ta có $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\Rightarrow \tan a\tan b=\dfrac{\tan a-\tan b}{\tan(a-b)}-1$.

Do đó:

$$\tan x\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan(x+\frac{\pi}{3})-\tan x}{\tan\frac{\pi}{3}}-1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x\right]-1 \qquad (1)$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\frac{\pi}{3}}-1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]-1 \qquad (2)$$

$$\tan x\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x}{\tan\frac{2\pi}{3}}-1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x\right]-1\ (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được: B = –3. Vậy B không phụ thuộc x.

II. CÔNG THỨC NHÂN

***Vấn đề 1:* Sử dụng trực tiếp các công thức để tính hay rút gọn biểu thức**

1. a) $A=\cos^2(x+45^0)-\sin^2(x+45^0)=\cos[2(x+45^0)=\cos(2x+90^0)=-\sin2x.$

b) $B=\cos^4 2x-\sin^4 2x=(\cos^2 2x-\sin^2 2x)(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=\cos4x.$

c) $C=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin2x.$

d) $D=1-8\sin^2 x.\cos^2 x=1-2(2\sin x\cos x)^2=1-2\sin^2 2x=\cos4x.$

e) $E=4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=4\sin x\cos x\cos2x=2\sin2x.\cos2x=\sin4x.$

f) $F=\frac{2}{(1-\tan a)(1+\cot a)}=\frac{2}{(1-\tan a)\left(1+\frac{1}{\tan a}\right)}=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\tan2a.$

2. a) $A=\cos^2\frac{\pi}{24}-\cos^4\frac{\pi}{24}=\cos^2\frac{\pi}{24}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{24}\right)=\cos^2\frac{\pi}{24}\sin^2\frac{\pi}{24}$

$$=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}.\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{8}=\frac{2-\sqrt{3}}{16}.$$

b) $B=\tan^2 15^0+\tan^2 75^0=\tan^2 15^0+\cot^2 15^0$

$$=(\tan15^0+\cot15^0)^2-2\tan15^0\cot15^0$$

$$=\left(\frac{\sin15^0}{\cos15^0}+\frac{\cos15^0}{\sin15^0}\right)^2-2=\frac{1}{\sin^2 15^0.\cos^2 15^0}-2$$

$$=\frac{4}{\sin^2 30^0}-2=16-2=14.$$

b) $A=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\cos\frac{4\pi}{7}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{4\pi}{7}\cos\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{\pi}{7}=-\frac{1}{8}.$$

c) $B = 96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 48\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$

$= 24\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 12\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$

d) $C = \cos\frac{\pi}{33}.\cos\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$\Rightarrow C.\sin\frac{\pi}{33} = \sin\frac{\pi}{33}\cos\frac{\pi}{33}.\cos\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$= \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$= \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$= \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$= \frac{1}{16}\sin\frac{16\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33}$

$= \frac{1}{32}\sin\frac{32\pi}{33} = \frac{1}{32}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{33}\right) = \frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{33} \Rightarrow C = \frac{1}{32}.$

3. a) $A = 8\tan 18^0.\cos 18^0.\cos 36^0.\cos 72^0.\cos 144^0$

$= 8\frac{\sin 18^0}{\cos 18^0}.\cos 18^0.\cos 36^0.\cos 72^0.\cos 144^0$

$= \frac{1}{\cos 18^0}.4\sin 36^0.\cos 36^0.\cos 72^0.\cos 144^0$

$= \frac{1}{\cos 18^0}.2\sin 72^0.\cos 72^0.\cos 144^0$

$= \frac{1}{\cos 18^0}.\sin 144^0.\cos 144^0 = \frac{\sin 288^0}{\cos 18^0} = \frac{\sin(180^0 + 108^0)}{\cos 18^0}$

$= \frac{-\sin 108^0}{\cos 18^0} = -\frac{\sin\left(90^0 + 18^0\right)}{\cos 18^0} = -\frac{\cos 18^0}{\cos 18^0} = -1.$

b) $B = \sin 6^0.\sin 42^0.\sin 66^0.\sin 78^0$

$= \sin 6^0.\sin(90^0 - 48^0).\sin(90^0 - 24^0).\sin(90^0 - 12^0)$

$= \sin 6^0.\cos 48^0.\cos 24^0.\cos 12^0.$

$\Rightarrow B\cos 6^0 = \sin 6^0.\cos 6^0.\cos 12^0.\cos 24^0.\cos 48^0$

$= \frac{1}{2}\sin 12^0.\cos 12^0.\cos 24^0.\cos 48^0$

$= \frac{1}{4}\sin 24^0.\cos 24^0.\cos 48^0$

$= \frac{1}{8}\sin 48^0.\cos 48^0 = \frac{1}{16}\sin 96^0 = \frac{1}{16}\cos 6^0 \Rightarrow B = \frac{1}{16}$.

c) $C = \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$

$= \frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\right)}{2\sin 10^0 \cos 10^0} = \frac{4\left(\sin 30^0 \cos 10^0 - \cos 30^0 \sin 10^0\right)}{\sin 20^0}$

$= \frac{4\sin(30^0 - 10^0)}{\sin 20^0} = 4$.

d) $D = \frac{\tan\frac{7\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2}.\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

4. a) $A = 1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3+\cos 2x}{2}$.

b) $B = \frac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x} = -\frac{1}{\cos 2x}$.

5. a) $A = 1 + \sin 2x = \sin 2x + \sin 90^0 = 2\sin(x + 45^0)\cos(x - 45^0)$.

b) $B = 1 - \sin x = \sin 90^0 - \sin x = 2\cos\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{x}{2}\right)$.

6. a) $a = 112^0 30'$ nên $\sin a > 0$, $\cos a < 0$ và $\cos 2a = \cos 225^0 = -\cos 45^0$. Do đó:

* $\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

* $\cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

* $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2} - 1$.

b) Đặt $t = \tan\frac{a}{2}$. Ta có

$\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow 4t + 2 - 2t^2 = \sqrt{7} + \sqrt{7}t^2$

$\Leftrightarrow (2+\sqrt{7})t^2 - 4t + \sqrt{7} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{7} - 2 \\ t = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3} \end{array}\right.$.

Vì $0 < a < \dfrac{\pi}{6}$ nên $0 < \tan\dfrac{a}{2} < \tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. Do đó $t = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$.

Vậy $\tan\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$.

c) Ta có: $3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1 \Leftrightarrow 3\sin^2 a = 1 - 2\sin^2 b = \cos 2b$.

$3\sin 2a - 2\sin 2b = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2b = 3\sin 2a \Leftrightarrow \sin 2b = 3\sin a\cos a$.

Do đó: $\cos(a + 2b) = \cos a\cos 2b - \sin a\sin 2b = \cos a.3\sin^2 a - \sin a.3\sin a\cos a = 0$.

Do $0 < a; b < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < a + 2b < \dfrac{3\pi}{2}$ mà $\cos(a + 2b) = 0 \Rightarrow a + 2b = \dfrac{\pi}{2}$.

Vấn đề 2: Chứng minh đẳng thức

1. a) Vế phải $= 4\sin a\cos a(1 - 2\sin^2 a) = 2.\sin 2a.\cos 2a = \sin 4a =$ Vế trái.

b) Vế trái $= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x.\sin^2 x$

$= (\cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x) - (2\sin x\cos x)^2$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - \sin^2 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x =$ Vế phải.

c) Vế trái $= \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 2x} =$ Vế phải.

d) Vế trái $= \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x =$ Vế phải.

e) Vế trái $= \dfrac{1 + \cos 2x - \cos x}{2\sin x\cos x - \sin x} = \dfrac{2\cos^2 x - \cos x}{\sin x(2\cos x - 1)}$

$= \dfrac{\cos x(2\cos x - 1)}{\sin x(2\cos x - 1)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.

f) Vế trái $= 4\cos x.\cos(60^0 + x).\cos(60^0 - x)$

$= 4\cos x.(\cos 60^0\cos x - \sin 60^0\sin x)(\cos 60^0\cos x + \sin 60^0\sin x)$

$= 4\cos x[(\cos 60^0\cos x)^2 - (\sin 60^0\sin x)^2]$

$= 4\cos x.\left[\dfrac{1}{4}\cos^2 x - \dfrac{3}{4}\sin^2 x\right] = \cos x[\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x)]$

$= \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x =$ Vế phải.

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$C = 4\cos 10^0\cos 70^0\cos 50^0 = 4\cos 10^0.\cos(60^0 + 10^0)\cos(60^0 - 10^0)$

$= \cos(3.10^0) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a) $VT = \dfrac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \dfrac{2\sin a - 2\sin a\cos a}{2\sin a + 2\sin a\cos a} = \dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$

$= \dfrac{2\sin^2 \dfrac{a}{2}}{2\cos^2 \dfrac{a}{2}} = \tan^2 \dfrac{a}{2} = VP.$

b) $VT = \dfrac{1+\cos 4x}{\cot x - \tan x} = \dfrac{2\cos^2 2x}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{2\cos^2 2x.\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin 2x\cos^2 2x}{\cos 2x} = \sin 2x\cos 2x = \dfrac{\sin 4x}{2} = VP.$

c) $VT = \dfrac{\sin x + \sin \dfrac{x}{2}}{1+\cos x + \cos \dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\sin \dfrac{x}{2}\cos \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{2}}{2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}}$

$= \dfrac{\sin \dfrac{x}{2}(2\cos \dfrac{x}{2}+1)}{\cos \dfrac{x}{2}(2\cos \dfrac{x}{2}+1)} = \tan \dfrac{x}{2} = VP.$

d) $VT = \dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$= \dfrac{\cos x - \tan x\cos x}{\cos x + \tan x\cos x} = \dfrac{1-\tan a}{1+\tan a} = VP.$

e) $VT = \dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1-\cos a)} = \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^2 a}{2(1-\cos a)}$

$= \dfrac{\sin^2 a}{2(1-\cos a)} = \dfrac{1-\cos^2 a}{2(1-\cos a)} = \dfrac{1+\cos a}{2} = \cos^2 \dfrac{a}{2} = VP.$

f) $VT = \dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 3x\cos^2 x - \cos^2 3x\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$= \dfrac{(\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x)(\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x)}{(\sin x\cos x)^2}$

$= \dfrac{\sin 4x.\sin 2x}{\dfrac{1}{4}\sin^2 2x} = \dfrac{4.2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x} = 8\cos 2x = VP.$

g) $VT = \dfrac{\sin^2 2a - 4\sin^2 a}{\sin^2 2a + 4\sin^2 a - 4} = \dfrac{4\sin^2 a\cos^2 a - 4\sin^2 a}{4\sin^2 a\cos^2 a + 4\sin^2 a - 4}$

$$= \frac{4\sin^2 a(\cos^2 a - 1)}{4\sin^2 a\cos^2 a - 4(1-\sin^2 a)} = \frac{-4\sin^4 a}{4\sin^2 a\cos^2 a - 4\cos^2 a}$$

$$= \frac{-4\sin^4 a}{4\cos^2 a(\sin^2 a - 1)} = \frac{-4\sin^4 a}{-4\cos^4 a} = \tan^4 a = \text{VP}.$$

h) $\text{VT} = \dfrac{\cot^2 2x - 1}{2\cot 2x} - \cos 8x \cot 4x$

$$= \left(\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - 1\right)\frac{\sin 2x}{2\cos 2x} - \cos 8x \cot 4x$$

$$= \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2\sin 2x\cos 2x} - \cos 8x \cot 4x$$

$$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \cos 8x\frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{\cos 4x(1-\cos 8x)}{\sin 4x}$$

$$= \frac{\cos 4x.2\sin^2 4x}{\sin 4x} = 2\sin 4x\cos 4x = \sin 8x = \text{VP}.$$

Vấn đề 3: Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

1. a) $A = \dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$

$$= \cos^2 x - \frac{\cos 3x}{\cos x} + \sin^2 x + \frac{\sin 3x}{\sin x}$$

$$= 1 + \frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}$$

$$= 1 + \frac{2\sin(3x - x)}{\sin 2x} = 1 + 2 = 3$$

$\Rightarrow$ A không phụ thuộc x.

b) Ta có: $\sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos x$; $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Do đó: $B = \sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos^4 x + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$= \sin^4 x + \cos^4 x + \left(\frac{1 - \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{2}\right)^2$$

$$= 1-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{4}\left[(1+\sin 2x)^2+(1-\sin 2x)^2\right]$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{4}\left(2+2\sin^2 2x\right) = \frac{3}{2}.$$

Vậy B không phụ thuộc x.

2. Nếu $t = \tan\frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì ta có:

$$A = a.\frac{2t}{1+t^2}+b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2at+b-bt^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{2a.\dfrac{a}{b}+b-b\dfrac{a^2}{b^2}}{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = \frac{2a^2+b^2-a^2}{b.\dfrac{b^2+a^2}{b^2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}.b = b$$

$\Rightarrow$ A không phụ thuộc a và x.

3. Ta có: $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$.

Tương tự có: $\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{c+a-b}{a+b+c}; \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$.

Do đó: $E = \frac{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}{a+b+c} = 1$

$\Rightarrow$ E không phụ thuộc a, b, c.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Vấn đề 1: Biến đổi các biểu thức thành tổng

1. a) $A = \cos(x+y).\cos(x-y)$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x+y+x-y)+\cos(x+y-x+y)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y\right).$$

b) $B = \sin 15^0 \sin 75^0 = \frac{1}{2}\left[\cos(75^0-15^0)-\cos(75^0+15^0)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 60^0-\cos 90^0\right) = \frac{1}{4}.$$

c) $C = 2.\sin x.\sin 3x.\sin 5x = \frac{1}{2}\sin 5x\left[\cos(3x-x)-\cos(3x+x)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 5x\cos 2x-\sin 5x\cos 4x\right] = \frac{1}{4}\left(\sin 7x+\sin 3x-\sin 9x-\sin x\right).$$

d) $D = \sin x.\cos(x + 60^0).\cos(x - 60^0)$

$= \frac{1}{2}\sin x\left[\cos(x+60^0+x-60^0)+\cos(x+60^0-x+60^0)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos 2x\sin x+\cos 120^0\sin x\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)-\frac{1}{2}\sin x\right] = \frac{1}{4}(\sin 3x-2\sin x).$

2. a) $A = \sin(a + 30^0).\cos(a - 30^0) = \frac{1}{2}(\sin 2a+\sin 60^0)$

b) $B = 8\cos x.\sin 2x.\sin 3x = 4\sin 3x\left[\sin 3x+\sin x\right]$

$= 4\sin^2 3x + 4\sin 3x\sin x$

$= 2(1 - \cos 6x) + 2(\cos 2x - \cos 4x) = 2(1 - \cos 6x + \cos 2x - \cos 4x).$

c) $C = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(x+\frac{\pi}{6}-(x-\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6})\right]\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\cos^2 2x\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 2x-\cos 4x-1\right).$

d) $D = 4\cos(a - b).\cos(b - c).\cos(c - a)$

$= 2[\cos(a - b + b - c) + \cos(a - b - b + c)]\cos(c - a)$

$= 2\cos(a - c)\cos(c - a) + 2\cos(a - 2b + c)\cos(c - a)$

$= 2\cos^2(a - c) + \cos(a - 2b + c + c - a) + \cos(a - 2b + c - c + a)$

$= 2\cos^2(a - c) + \cos(-2b + 2c) + \cos(2a - 2b)$

$= 1 + \cos(2a - 2c) + \cos(2c - 2b) + \cos(2a - 2b).$

Vấn đề 2: Biến đổi các biểu thức thành tích

1. a) $A = 1 - 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)$

$= -4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$

b) $B = \sqrt{3} - 2\sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin x\right)$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right).$

c) $A = \cos(x - 30^0) - \cos(x - 60^0) = -2\sin(x - 45^0)\sin 30^0 = -\sin(x - 45^0)$.

d) $B = 1 + \sin 2x - \cos 4x = (1 - \cos 4x) + \sin 2x = 2\sin^2 2x + \sin 2x$

$= 2\sin 2x\left(\sin 2x + \dfrac{1}{2}\right) = 2\sin 2x\left(\sin 2x + \sin 30^0\right)$

$= 4\sin 2x \sin(x + 15^0)\cos(x - 15^0)$.

e) $C = \sin 5a + \sin 6a + \sin 7a + \sin 8a = (\sin 8a + \sin 6a) + (\sin 7a + \sin 5a)$

$= 2\sin 7a\cos a + 2\sin 6a\cos a = 2\cos a(\sin 7a + \sin 6a)$

$= 4\cos a.\sin\dfrac{13a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$.

f) $D = \sin^2 x - 2\sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} - 2\dfrac{1-\cos 4x}{2} + \dfrac{1-\cos 6x}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos 4x - \left(\cos 6x + \cos 2x\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\cos 4x - 2\cos 4x\cos 2x\right]$

$= \cos 4x\left[\dfrac{1}{2} - \cos 2x\right] = \cos 4x(\cos 60^0 - \cos 2x)$

$= -2\cos 4x \sin(30^0 + x)\sin(30^0 - x)$.

g) $E = 4\cos^2 x - 1 = 2(1 + \cos 2x) - 1 = 1 + 2\cos 2x = 2\left(\dfrac{1}{2} + \cos 2x\right)$

$= 2(\cos 2x + \cos 60^0) = 4\cos(x + 30^0)\cos(x - 30^0)$.

h) $F = \cos(60^0 + x) + \cos(60^0 - x) + \cos 3x$

$= 2\cos 60^0 \cos x + \cos 3x = \cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cos x$.

i) $G = \sin 70^0 - \sin 20^0 + \sin 50^0 = 2\cos 45^0\sin 25^0 + 2\sin 25^0\cos 25^0$.

$= 2\sin 25^0[\cos 45^0 + \cos 25^0] = 4\sin 25^0.\cos 35^0\cos 10^0$.

2. a) $A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 1 + \cos 2x + \cos 3x + \cos x$

$= 2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x = 2\cos x(\cos x + \cos 2x)$

$= 4\cos x\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

b) $B = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 4x}{2} + \dfrac{1+\cos 6x}{2} - 1$

$= \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right] = \dfrac{1}{2}\left(2\cos^2 x + 2\cos 5x\cos x\right)$

$= \cos x(\cos 5x + \cos x) = 2\cos x\cos 3x\cos 2x$.

c) $C = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 4x + 1 - 2\cos^2 2x = \tan 30^0\sin 4x - \cos 4x$

$= \dfrac{\sin 30^0 \sin 4x - \cos 30^0 \cos 4x}{\cos 30^0} = -\dfrac{\cos(4x + 30^0)}{\cos 30^0}$.

d) $D = \sin x.\cos 3x + \sin 4x.\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x + \sin 6x + \sin 2x)$

$= \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x) = \sin 5x \cos x.$

e) $E = 2\cos 3x.\cos x + \cos 10x = \cos 4x + \cos 2x + \cos 10x$

$= \cos 4x + 2\cos 6x \cos 4x = 2\cos 4x\left(\frac{1}{2} + \cos 6x\right)$

$= 2\cos 4x(\cos 6x + \cos 60^0) = 4\cos 4x \cos(3x + 30^0)\cos(3x - 30^0).$

f) $F = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin A\cos A + 2\sin(B + C)\cos(B - C)$

$= 2\sin A\cos A + 2\sin(\pi - A)\cos(B - C)$

$= 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$

$= -2\sin A[\cos(B + C) - \cos(B - C)]$

$= 4\sin A.\sin B.\sin C.$

g) $G = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C - 1$ (A, B, C là ba góc của tam giác)

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) - 2\cos^2 C$

$= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos C.\cos(A + B)$

$= 2\cos C[\cos(A + B) - \cos(A - B)] = -4\cos C.\sin A.\sin B.$

Vấn đề 3: Áp dụng các công thức để tính giá trị hay rút gọn một biểu thức lượng giác

1. a) $A = 4(\cos 24^0 + \cos 48^0 - \cos 84^0 - \cos 12^0)$

$= 4(2\cos 36^0\cos 12^0 - 2\cos 48^0\cos 36^0)$

$= 8\cos 36^0(\cos 12^0 - \cos 48^0)$

$= 16\cos 36^0\sin 30^0\sin 18^0$

$= \frac{8\sin 18^0.\cos 18^0\cos 36^0}{\cos 18^0}$

$= \frac{4\sin 36^0\cos 36^0}{\cos 18^0} = \frac{2\sin 72^0}{\sin 72^0} = 2.$

b) $2B\sin\frac{\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}.$

$= \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}$

$= -\sin\frac{\pi}{7} + \sin\pi = -\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$

c) $C = \sin\frac{x}{4}.\sin\frac{5x}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos\frac{3x}{2}\right).$

Vì $x = 60^0$ nên $C = \frac{1}{2}(\cos 60^0 - \cos 90^0) = \frac{1}{4}.$

d) $D = \sin 20^0.\sin 40^0.\sin 80^0 = \frac{1}{2}\left[\cos 20^0 - \cos 60^0\right]\sin 80^0$

$= \frac{1}{2}\sin 80^0 \cos 20^0 - \frac{1}{2}\cos 60^0 \sin 80^0$

$= \frac{1}{4}\left[\sin 100^0 + \sin 30^0 - \sin 80^0\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\sin 80^0 + \frac{1}{2} - \sin 80^0\right] = \frac{1}{8}.$

2. a) $A = \cos 10^0.\cos 30^0.\cos 50^0.\cos 70^0$

$= \cos 30^0.\cos 10^0.\frac{1}{2}\left(\cos 120^0 + \cos 20^0\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 120^0 \cos 10^0 + \cos 20^0 \cos 10^0\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 10^0 + \frac{1}{2}(\cos 30^0 + \cos 10^0)\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}\cos 30^0\right] = \frac{3}{16}$

b) $B = \frac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0 = \frac{1 - 4\sin 70^0 \sin 10^0}{\sin 10^0} = \frac{1 + 2(\cos 80^0 - \cos 60^0)}{\sin 10^0}$

$= \frac{1 + 2\cos 80^0 - 2\cos 60^0}{\sin 10^0} = \frac{2\sin 10^0}{\sin 10^0} = 2.$

c) $C\sin\frac{\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{5\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{5} - \sin\frac{5\pi}{5} + \sin\frac{9\pi}{5} - \sin\frac{7\pi}{5}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{9\pi}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[-\sin\frac{\pi}{5} + \sin\left(-\frac{\pi}{5} + 2\pi\right)\right] = -\sin\frac{\pi}{5} \Rightarrow C = -1.$

d) $D = \frac{\sin 40^0 - \sin 45^0 + \sin 50^0}{\cos 40^0 - \cos 45^0 + \cos 50^0} - \frac{6\left(\sqrt{3} + 3\tan 15^0\right)}{3 - \sqrt{3}\tan 15^0}.$

$= \frac{2\sin 45^0 \cos 5^0 - \sin 45^0}{2\cos 45^0 \cos 5^0 - \cos 45^0} - \frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 15^0\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 15^0}$

$= \frac{(2\cos 5^0 - 1)\sin 45^0}{(2\cos 45^0 - 1)\cos 45^0} - \frac{6\left(\tan 30^0 + \tan 15^0\right)}{1 - \tan 30^0 \tan 15^0}$

$= \tan 45^0 - 6\tan(30^0 + 15^0) = -5\tan 45^0 = -5.$

3. a) $A=\dfrac{\sin 5a-\sin 3a}{2\cos 4a}=\dfrac{2\cos 4a\sin a}{2\cos 4a}=\sin a$.

b) $B=\dfrac{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}=\dfrac{2\cos 2x\cos x-\cos 2x}{2\sin 2x\cos x-\sin 2x}=\tan 2x.$

c) $C=\dfrac{1+\sin 4a-\cos 4a}{1+\cos 4a+\sin 4a}=\dfrac{2\sin^2 2a+2\sin 2a\cos 2a}{2\cos^2 2a+2\sin 2a\cos 2a}=\tan 2a.$

d) $D=\sin 4x.\sin 10x-\sin 11x.\sin 3x-\sin 7x.\sin x$

$=\dfrac{1}{2}[\cos 6x-\cos 14x+\cos 14x-\cos 8x+\cos 8x-\cos 6x]=0.$

4. a) $A=\dfrac{\cos 4a-\cos 2a}{\sin 4a+\sin 2a}=\dfrac{-2\sin 3a\sin a}{2\sin 3a\cos a}=-\tan a$.

b) $B=\dfrac{\sin^2 4x-\sin^2 2x}{\cos^2 x-\cos^2 2x}=\dfrac{2\sin^2 4x-2\sin^2 2x}{2\cos^2 x-2\cos^2 2x}=\dfrac{1-\cos 8x-1+\cos 4x}{1+\cos 2x-1-\cos 4x}$

$=\dfrac{-2\sin 6x\sin(-2x)}{-2\sin 3x\sin(-x)}=\dfrac{2\sin 3x\cos 3x.2\sin x\cos x}{\sin 3x\sin x}=4\cos 3x\cos x.$

c) $C=\dfrac{\cos 2x-\sin 4x-\cos 6x}{\cos 2x+\sin 4x-\cos 6x}=\dfrac{-\sin 4x-(\cos 6x-\cos 2x)}{\sin 4x-(\cos 6x-\cos 2x)}$

$=\dfrac{-\sin 4x+2\sin 4x\sin 2x}{\sin 4x+2\sin 4x\sin 2x}=\dfrac{-1+2\sin 2x}{1+2\sin 2x}.$

d) $D=\dfrac{1+\cos a+\cos 2a+\cos 3a}{2\cos^2 a+\cos a-1}=\dfrac{(1+\cos 2a)+(\cos 3a+\cos a)}{\cos 2a+\cos a}$

$=\dfrac{2\cos^2 a+2\cos 2a\cos a}{\cos 2a+\cos a}=2\cos a$.

e) $E=\dfrac{\sin a}{\sin(a-b).\sin(a-c)}+\dfrac{\sin b}{\sin(b-a).\sin(b-c)}+\dfrac{\sin c}{\sin(c-a).\sin(c-b)}$

$=\dfrac{-\sin a\sin(b-c)-\sin b\sin(c-a)-\sin c\sin(a-b)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}$

$=\dfrac{-\sin a\sin(b-c)-\sin b\sin(c-a)-\sin c\sin(a-b)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}$

mà:

$-\sin a\sin(b-c)=\dfrac{1}{2}[\cos(a+b-c)-\cos(a-b+c)]$

$-\sin b\sin(c-a)=\dfrac{1}{2}[\cos(b+c-a)-\cos(b-c+a)]$

$-\sin c\sin(a-b)=\dfrac{1}{2}[\cos(c+a-b)-\cos(c-a+b)]$

nên tử thức bằng 0. Do đó $E=0$.

f) $F=\dfrac{\sin(a+b)-\sin a}{\sin(a+b)+\sin a}-\dfrac{\cos(a+b)+\cos a}{\cos(a+b)-\cos a}$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{2a+b}{2}\sin\dfrac{b}{2}}{2\sin\dfrac{2a+b}{2}\cos\dfrac{b}{2}}-\dfrac{2\cos\dfrac{2a+b}{2}\cos\dfrac{b}{2}}{-2\sin\dfrac{2a+b}{2}\sin\dfrac{b}{2}}$

$=\cot\dfrac{2a+b}{2}\left(\tan\dfrac{b}{2}+\cot\dfrac{b}{2}\right)$

$=\cot\dfrac{2a+b}{2}.\dfrac{1}{\sin\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{b}{2}}=\dfrac{2\cot\dfrac{2a+b}{2}}{\sin b}.$

Vấn đề 4: Chứng minh đẳng thức

1. a) $\sin75^0+\cos75^0=\sin75^0+\sin15^0=2\sin45^0\cos30^0=2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

b) $\sin65^0+\sin55^0=2\sin60^0\cos5^0=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos5^0=\sqrt{3}\cos5^0.$

c) $\cos12^0-\cos48^0=-2\sin30^0\sin(-18^0)=2.\dfrac{1}{2}\sin18^0=\sin18^0.$

d) $\tan267^0+\tan93^0=\dfrac{\sin(267^0+93^0)}{\cos267^0\cos93^0}=\dfrac{\sin360^0}{\cos267^0\cos93^0}=0.$

2. a) $2VT=\cos(a-b+c)-\cos(a+b-c)+\cos(b-c+a)-\cos(b+c-a)+$
$+\cos(c-a+b)-\cos(c+a-b)=0\Rightarrow VT=0$ (ĐPCM).

b) $\sin a+\sin b+\sin c=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}+2\sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{c}{2}$

$=2\sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}+2\sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

$=2\sin\dfrac{c}{2}\left[\cos\dfrac{a-b}{2}+\cos\dfrac{a+b}{2}\right]=4\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\sin\dfrac{c}{2}.$

3. a) $\dfrac{\sin^2 4a}{2\cos a+\cos3a+\cos5a}=\dfrac{4\sin^2 2a\cos^2 2a}{2\cos a+2\cos4a\cos a}$

$=\dfrac{8\sin a\cos a\sin2a\cos^2 2a}{2\cos a(1+\cos4a)}=\dfrac{4\sin a\sin2a\cos^2 2a}{2\cos^2 2a}=2\sin a\sin2a.$

b) $8\sin^2 x.\sin(x+60^0).\sin(x-60^0)$

$=4\sin^2x[\cos120^0-\cos2x]=2(1-\cos2x)(-\dfrac{1}{2}-\cos2x)$

$=(1-\cos2x)(-1-2\cos2x)=-1-\cos2x+2\cos^2 2x=\cos4x-\cos2x.$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - \cos 4x = 1 + \sin 2x - \cos 4x = \sin 2x + 2\sin^2 2x$

$= 2\sin 2x\left[\frac{1}{2} + \sin 2x\right] = 2\sin 2x(\sin 2x + \sin 30^0)$

$= 4\sin 2x.\sin(x + 15^0)\cos(x - 15^0)$.

Vấn đề 5: **Chứng minh biểu thức không phụ thuộc đối số**

1. a) $A = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + \cos 2x\right] = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + 1 - 2\sin^2 x\right] = \frac{1}{4}$.

Vậy A không phụ thuộc x.

b) $B = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x\cos x}.\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x(\sin x + 2\cos x)}{\cos x(2\cos x + \sin x)}.\frac{\cos x}{\sin x} = 1$.

Vậy B không phụ thuộc x.

2. a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\cos(A - B) - \cos C.\cos(A + B)$

$= 1 - \cos C[\cos(A + B) + \cos(A - B)] = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

Vậy $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$.

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A - B}{2} + 1 - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A + B}{2}$

$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A + B}{2} - \cos\frac{A - B}{2}\right] = 1 + 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$.

Vậy $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

c) $\sin A.\cos B.\cos C + \sin B.\cos C.\cos A + \sin C.\cos A.\cos B$

$= \sin A\cos B\cos C + \cos A(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$

$= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin(B + C)$

$= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin A$

$= \sin A[\cos B\cos C + \cos A]$

$= \sin A[\cos B\cos C - \cos(B + C)]$

$= \sin A[\cos B\cos C - (\cos B\cos C - \sin B\sin C)] = \sin A\sin B\sin C$.

Vậy $\sin A.\cos B.\cos C + \sin B.\cos C.\cos A + \sin C.\cos A.\cos B = \sin A\sin B\sin C$.

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 6

1. a) $VT = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x = VP.$

b) $VT = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \cdot \dfrac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = \dfrac{\tan^2 x + \tan^2 x \cot^2 x}{\cot^2 x + \tan^2 x \cot^2 x} = \dfrac{\tan^2 x + 1}{\cot^2 x + 1}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x = \dfrac{\tan^2 x(\tan^2 x + \cot^2 x)}{\tan^2 x + \cot^2 x} = \dfrac{1 + \tan^4 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} = VP.$

c) $VT = \dfrac{\sin x(\cos x - \sin x) - \cos x(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{1 + \cot^2 x}{1 - \cot^2 x} = VP.$

d) $VT = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 y}{\tan^2 x . \tan^2 y} = \dfrac{1}{\tan^2 y} - \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 y} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{1 - \sin^2 y}{\sin^2 y} - \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 y} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x . \sin^2 y} = VP.$

2. a) Áp dụng kết quả $4\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$ ta có:

$4\cos\dfrac{\pi}{15}.\cos\dfrac{4\pi}{15}.\cos\dfrac{6\pi}{15} = 4\cos\dfrac{\pi}{15}.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{15}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{15}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{15}$

$4\cos\dfrac{2\pi}{15}.\cos\dfrac{3\pi}{15}.\cos\dfrac{7\pi}{15} = 4\cos\dfrac{2\pi}{15}.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{15}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{15}\right) = \cos\dfrac{6\pi}{15}$

Suy ra:

$16A = \left(4\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\right).\left(4\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}\right)\cos\dfrac{5\pi}{15}$

$= \cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15} = \cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}}{2\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}}{4\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\dfrac{4\pi}{5}}{8\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{1}{8}$. Vậy $A = \dfrac{1}{128}$.

b) $B = \dfrac{1}{2}\left(\cos 60^0 + \cos 40^0\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cos 30^0 + \cos 20^0\right) + \dfrac{1}{2}\sin 10^0$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos 60^0 - \cos 30^0 + \cos 40^0 - \cos 20^0 + \sin 10^0\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin 30^0 \sin 10^0 + \sin 10^0\right] = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

3. a) Ta có $\cot(45^0 + a) = -2 \Rightarrow \tan(45^0 - a) = -2 \Rightarrow \dfrac{\tan 45^0 - \tan a}{1 + \tan 45^0 \tan a} = -2$

$\Rightarrow \dfrac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = -2 \Rightarrow 1 - \tan a = -2 - 2\tan a \Rightarrow t = \tan a = -3$. Do đó:

$A = \cos(90^0 + 2a) = -\sin 2a = -\dfrac{2t}{1+t^2} = -\dfrac{2(-3)}{1+(-3)^2} = \dfrac{3}{5}$.

$B = \cos(270^0 + 4a) = -\cos(90^0 + 4a) = \sin 4a = 2\sin 2a.\cos 2a$

$= 2.\dfrac{2t}{1+t^2}.\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 2.\dfrac{3}{5}.\dfrac{1-9}{1+9} = -\dfrac{24}{25}$.

b) Ta có $\sin a + \cos a = m \Rightarrow 1 + 2\sin a\cos a = m^2 \Rightarrow \sin a\cos a = \dfrac{m^2 - 1}{2}$.

Do đó

$$B = \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2\sin^2 a\cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \frac{-m^4 + 2m^2 + 1}{2}.$$

c) Ta có $\sin a.\cos a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $0 < a < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2a = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$; $\cos 2a = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$.

$$C = \frac{\tan a - \cot a}{\tan a + \cot a} = \frac{\dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a}}{\dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a}} = -\cos 2a = -\frac{\sqrt{61}}{8}.$$

4. a) $A = \dfrac{1 - \cos 100^0}{2} + \dfrac{1 - \cos 20^0}{2} + \sin 50^0.\sin 10^0$

$= 1 - \dfrac{\cos 100^0 + \cos 20^0}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\cos 60^0 - \cos 40^0\right)$

$= 1 - \cos 60^0 \cos 40^0 - \dfrac{1}{2}\left(\cos 60^0 - \cos 40^0\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\cos 40^0 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\cos 40^0 = \dfrac{3}{4}$.

b) $B = \sin 5^0.\sin 15^0.\sin 25^0 ... \sin 65^0.\sin 75^0.\sin 85^0$.

Ta có: $4\sin x\sin(x + 60^0)\sin(60^0 - x) = 2\sin x(\cos 2x - \cos 120^0)$

$= 2\cos 2x\sin x + \sin x = \sin 3x - \sin x + \sin x = \sin 3x$.

Do đó ta có:

$4\sin 5^0\sin 55^0\sin 65^0 = 4\sin x\sin(60^0 - 5^0)\sin(60^0 + 5^0) = \sin(3.5^0) = \sin 15^0$.

$4\sin 15^0\sin 45^0\sin 75^0 = 4\sin x\sin(60^0 - 15^0)\sin(60^0 + 15^0) = \sin 45^0$.

$4\sin 25^0\sin 35^0\sin 85^0 = 4\sin x\sin(60^0 - 25^0)\sin(60^0 + 25^0) = \sin 75^0$.

Suy ra: $4^3.B = \sin 15^0.\sin 45^0.\sin 75^0 = \frac{1}{4}\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{256}$.

c) $C = 3\sin 15^0.\sin 75^0 + \dfrac{\sin 60^0}{\sin^4 15^0 - \sin^4 75^0}$

$= 3\sin 15^0.\cos 15^0 + \dfrac{\sin 60^0}{\sin^4 15^0 - \cos^4 15^0}$

$= \dfrac{3}{2}\sin 30^0 + \dfrac{\sin 60^0}{\sin^2 15^0 - \cos^2 15^0}$

$= \dfrac{3}{4} - \dfrac{2\sin 30^0 \cos 30^0}{\cos 30^0} = \dfrac{3}{4} - 2\sin 30^0 = \dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4}$.

d) $D = -2\sqrt{2}.\sin 10^0\left(2\sin 35^0 - \dfrac{1}{2\cos 5^0} - \dfrac{\cos 40^0}{\sin 5^0}\right)$

$= -2\sqrt{2}\left(2\sin 35^0 \sin 10^0 - \sin 10^0\left(\dfrac{1}{2\cos 5^0} + \dfrac{\cos 40^0}{\sin 5^0}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos 45^0 - \cos 25^0 + \sin 10^0\left(\dfrac{\sin 5^0 + 2\cos 40^0 \cos 5^0}{2\cos 5^0 \sin 5^0}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos 25^0 + \sin 5^0 + 2\cos 40^0 \cos 5^0\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos 25^0 + \sin 5^0 + \cos 45^0 + \cos 35^0\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \cos 25^0 + \sin 5^0 + \cos 35^0\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sin 5^0 - 2\sin 30^0 \sin 5^0\right) = 4$.

5. a) $A = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right]$

$= -\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sin\dfrac{\pi}{4}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{2}$.

b) $B = \dfrac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \dfrac{2\sin 4x \cos 3x + \sin 4x}{2\cos 4x \cos 3x + \cos 4x} = \tan 4x$.

c) $C = \cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a + x) + \cos^2(a + x)$

$= \cos^2 x - \cos(a + x)[2\cos a \cos x - \cos(a + x)]$

$= \cos^2 x - \cos(a + x)[\cos(a + x) + \cos(a - x) - \cos(a + x)]$

$= \cos^2 x - \cos(a + x)\cos(a - x)$

$= \dfrac{1 + \cos 2x}{2} - \dfrac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a) = \sin^2 a$.

d) $2D = 2\cos(a+b).\sin(a-b) + 2\cos(b+c).\sin(b-c) + 2\cos(c+a).\sin(c-a)$

$= \sin 2a - \sin 2b + \sin 2b - \sin 2c + \sin 2c - \sin 2a = 0 \Rightarrow D = 0.$

6. a) $A = \cot 2x + \dfrac{1}{\sin 2x} + \tan x = \dfrac{\cos 2x + 1}{\sin 2x} + \tan x = \dfrac{2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} + \tan x$

$= \cot x + \tan x = \dfrac{1}{\sin x \cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}.$

b) $B = \sin x\,(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x)$

$= \sin x + 2\cos 2x \sin x + 2\cos 4x \sin x + 2\cos 6x \sin x.$

$= \sin x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x = \sin 7x.$

c) $C = \dfrac{\cos 7a - \cos 8a - \cos 9a + \cos 10a}{\sin 7a - \sin 8a - \sin 9a + \sin 10a} = \dfrac{\cos 10x - \cos 8x - (\cos 9x - \cos 7x)}{\sin 10x - \sin 8x - (\sin 9x - \sin 7x)}$

$= \dfrac{-2\sin 9x \sin x + 2\sin 8x \sin x}{2\cos 9x \sin x - 2\cos 8x \sin x} = \dfrac{\sin 9x - \sin 8x}{\cos 9x - \cos 8x} = \dfrac{2\cos \dfrac{17x}{2} \sin \dfrac{x}{2}}{2\sin \dfrac{17x}{2} \sin \dfrac{x}{2}} = \cot \dfrac{17x}{2}.$

d) Áp dụng công thức $\tan a \tan b = \dfrac{\tan a - \tan b}{\tan(a-b)} - 1$, ta có:

$D = \tan 2a.\tan(30^0 - a) + \tan 2a.\tan(60^0 - a) + \tan(60^0 - a).\tan(30^0 - a)$

$= \tan 2a[\tan(30^0 - a) + \tan(60^0 - a)] + \tan(60^0 - a)\tan(30^0 - a)$

$= \tan 2a.\dfrac{\sin(30^0 - a + 60^0 - a)}{\cos(30^0 - a)\cos(60^0 - a)} + \dfrac{\sin(60^0 - a)\sin(30^0 - a)}{\cos(60^0 - a)\cos(30^0 - a)}$

$= \dfrac{\tan 2a \sin(90^0 - 2a) + \sin(60^0 - a)\sin(30^0 - a)}{\cos(30^0 - a)\cos(60^0 - a)}$

$= \dfrac{\tan 2a \cos 2a - \dfrac{1}{2}\left[\cos(90^0 - 2a) - \cos 30^0\right]}{\dfrac{1}{2}\left[\cos(90^0 - 2a) + \cos 30^0\right]}$

$= \dfrac{2\sin 2a - \left[\sin 2a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]}{\sin 2a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sin 2a + \sqrt{3}}{2\sin 2a + \sqrt{3}} = 1.$

7. a) $VT = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)} + \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)}$

$= \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} = \dfrac{2}{\cos x}.$

b) VT = $\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x)$

$= (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$= \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right)(-\cos 2x) = -\left(1 - \frac{1-\cos 4x}{4}\right)\cos 2x$

$= -\frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 4x\cos 2x) = -\frac{1}{4}\left[3\cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right]$

$= -\left(\frac{7}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 6x\right) = VP.$

c) VT = $3 - 4\cos 2x + \cos 4x = 3 - 4\cos 2x + (2\cos^2 2x - 1)$

$= 2\cos^2 2x - 4\cos 2x + 2$

$= 2(\cos 2x - 1)^2 = 2(-2\sin^2 x)^2 = 8\sin^4 x = VP.$

d) VT = $\frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{1-\sin^6 x}{\cos^6 x} = \frac{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x+\sin^4 x)}{\cos^6 x}$

$= \frac{1+\sin^2 x+\sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$= \frac{(1-\sin^2 x)^2+3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^4 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + 1 = VP.$

8. a) VT = $\frac{\sin^2 2x}{4}.\cos^2 x = \frac{1}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}.\frac{1+\cos 2x}{2}$

$= \frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x\cos 2x)$

$= \frac{1}{16}\left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right)$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x = VP.$

b) VT = $\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 4x - 1}{\cos 4x} = \frac{2\sin 2x\cos 2x - 1}{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$

$= \frac{-(\cos 2x - \sin 2x)^2}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = VP.$

c) VT = $\cos(2x + 60^0).\cos(2x - 60^0) = \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 120^0\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{4} = VP.$

d) $VT = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\left[1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = VP.$

9. Ta có $\cos^2 x + \cos^2 y = m \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} = m$

$\Rightarrow 2 + \cos 2x + \cos 2y = 2m \Rightarrow 2\cos(x + y)\cos(x - y) = 2m - 2$

$\Rightarrow \cos(x + y).\cos(x - y) = m - 1.$

10. a) Cho $\cos c = \cos a.\cos b \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$

Ta có: $\cos c = \cos a\cos b \Rightarrow \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b \Rightarrow \frac{\cos c - \cos a}{\cos c + \cos a} = \frac{\cos b - 1}{\cos b + 1}$

$\Rightarrow \frac{-2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2}}{2\cos\frac{c+a}{2}\cos\frac{c-a}{2}} = \frac{-2\sin^2\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}} \Rightarrow \tan\frac{c+a}{2}.\tan\frac{c-a}{2} = \tan^2\frac{b}{2}.$

b) Ta có $\sin(2a + b) = 5\sin b \Rightarrow \sin[a + (a + b)] = 5\sin[(a + b) - a]$

$\Rightarrow \sin a\cos(a + b) + \cos a\sin(a + b) = 5[\sin(a + b)\cos a - \cos(a + b)\sin a]$

$\Rightarrow 4\sin(a + b)\cos a = 6\sin a\cos(a + b)$

$\Rightarrow \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{3\sin a}{\cos a} \Rightarrow \frac{2\tan(a+b)}{\tan a} = 3.$

11. a) $A = \frac{\sin 5x}{\sin x} - 2(\cos 2x + \cos 4x)$

$= \frac{1}{\sin x}[\sin 5x - 2\cos 2x\sin x - 2\cos 4x\sin x]$

$= \frac{1}{\sin x}[\sin 5x - \sin 3x + \sin x - \sin 5x + \sin 3x] = \frac{1}{\sin x}.\sin x = 1.$

Vậy A không phụ thuộc x.

b) $B = 3\cos 2x + 5\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x$.

$= 3\cos 2x + \sin^4 x - \cos^4 x + 4\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x$.

$= 3\cos 2x + \sin^2 x - \cos^2 x + 4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$= 3\cos 2x - \cos 2x + 4\sin^2 x$

$= 2\cos 2x + 2(1 - \cos 2x) = 2$. Vậy B không phụ thuộc x.

c) $C = \cos^2(x + y) + \cos^2(x - y) - \cos 2x\cos 2y$.

$$= \frac{1+\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2y)}{2} - \cos 2x\cos 2y$$

$$= 1 + \frac{\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)}{2} - \cos 2x\cos 2y.$$

$= 1 + \cos 2x\cos 2y - \cos 2x\cos 2y = 1$. Vậy C không phụ thuộc x, y.

d) $D = \dfrac{\tan^2 x - 1}{2}\cot x + \cos 4x\cot 2x + \sin 4x$.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right)\frac{\cos x}{\sin x} + \cos 4x\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \sin 4x$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2\sin x\cos x} + \frac{\cos 4x\cos 2x + \sin 4x\sin 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos(4x - 2x)}{\sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 0.$$

Vậy D không phụ thuộc x.

12. a) Ta có $\tan(270^0 + a) = -2 \Rightarrow \tan(90^0 + a) = -2 \Rightarrow \cot a = 2 \Rightarrow \tan a = \dfrac{1}{2}$.

Do đó:

$$* \sin(90^0 + 2a) = \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}.$$

$$* \cos(180^0 + 4a) = -\cos 4a = 1 - 2\cos^2 2a = 1 - 2.\frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

b) Ta có $\dfrac{\cos 7a + \cos 4a + \cos a}{\sin 7a + \sin 4a + \sin a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2\cos 4a\cos 3a + \cos 4a}{2\sin 4a\cos 3a + \sin 4a} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \tan 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 8a = \frac{1 - \tan^2 4a}{1 + \tan^2 4a} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}.$$

Mục lục

Chương 1: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP 5

Hướng dẫn giải bài tập 22

Chương 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 32

Hướng dẫn giải bài tập 54

Chương 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 83

Hướng dẫn giải bài tập 126

Chương 4: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 207

Hướng dẫn giải bài tập 264

Chương 5: THỐNG KÊ 342

Hướng dẫn giải bài tập 369

Chương 6: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC 378

Hướng dẫn giải bài tập 416

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

***HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA**
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA DU LỊCH GIA LAI TRÊN TOÀN QUỐC
***HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA**
CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA PHƯƠNG NAM TRÊN TOÀN QUỐC
***davibooks.vn**
NHÀ SÁCH TRỰC TUYẾN
ĐT: 62972354

HUẾ:	**CÔNG TY CP SÁCH&TBTH HUẾ** – 76 Hàn Thuyên – TP. Huế
ĐÀ NẴNG:	**NS LAM CHÂU** – 129 Phan Chu Trinh
QUẢNG NGÃI:	**NS TRẦN QUỐC TUẤN** – 526 Quang Trung
NHA TRANG:	**CÔNG TY CP PHS** – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang
	SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương – Nha Trang
BÌNH THUẬN:	**NS HƯNG ĐẠO** – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết
ĐỒNG NAI:	**NS KIM NGÂN** – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa
	NS BIÊN HÒA – 35 Cách Mạng Tháng 8 – TP. Biên Hòa
	NS MINH ĐỨC – 156 Đường 30/4 – TP. Biên Hòa
VŨNG TÀU:	**NS ĐÔNG HẢI** – 38 Lý Thường Kiệt
	NS HOÀNG CƯƠNG – 163 Nguyễn Văn Trỗi
GIA LAI:	**CÔNG TY SÁCH TBTH** – 40B Hùng Vương – TP. Plieku
DAKLAK:	**NS LÝ THƯỜNG KIỆT** – 55 – 57 Lý Thường Kiệt
KONTUM:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
	NS CHÍ THÀNH – 72D Bùi Thị Xuân – Đà Lạt
DĂK NÔNG:	**NS GIÁO DỤC** – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
TÂY NINH:	**NS VĂN NGHỆ** – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:	**CÔNG TY PHS** – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An
TIỀN GIANG:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
ĐỒNG THÁP:	**NS VIỆT HƯNG** – 196 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:	**CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:	**NS TRẺ** – 41 Trần Hưng Đạo
KIÊN GIANG:	**NS ĐÔNG HỒ I** – 98B Trần Phú – Rạch Giá
	NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
BÌNH DƯƠNG:	**NHÀ SÁCH 277** – 518 Cách Mạng Tháng Tám – Thủ Dầu Một
CÀ MAU:	**NS MINH TRÍ** – 44 Nguyễn Hữu Lễ
AN GIANG:	**NS THƯ QUÁN** – 3/5 Tôn Đức Thắng – TP. Long Xuyên
	NS THANH KIÊN – 496 Võ Thị Sáu – TP. Long Xuyên
	TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC